



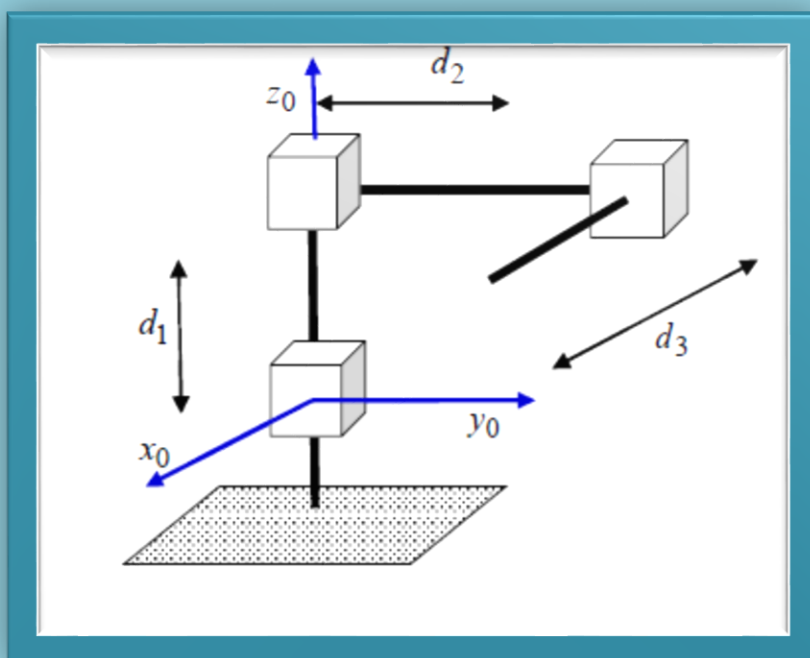
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ -
Скопје

Факултет за електротехника и
информациски технологии - Скопје



ЕЛИЗАБЕТА ЛАЗАРЕВСКА

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО ВОВЕД ВО РОБОТИКА



СКОПЈЕ, 2016

Автор

Д-р Елизабета Лазаревска, редовен професор на Факултетот за електротехника и
информациски технологии – Скопје

Наслов

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО ВОВЕД ВО РОБОТИКА

Рецензенти

Д-р Стојче Дескоски, редовен професор на Техничкиот факултет во Битола (во
пензија)

Д-р Васко Саздовски, насловен доцент на Факултетот за електротехника и
информациски технологии – Скопје

Издавач

Универзитет Свети Кирил и Методиј – Скопје

Електронско издание

ПРЕДГОВОР

Збирката во прв ред е наменета на студентите на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, од насоката Компјутерско системско инженерство, автоматика и роботика, кои го слушаат задолжителниот предмет Роботика 1 во IV семестар. Меѓутоа, таа може корисно да им послужи и на студентите од останатите сродни научни и технички дисциплини, дипломираните инженери и сите оние што сакаат да се запознаат со основите на роботиката. Додека за теоријата на роботиката постојат многу добри учебници и книги, практично не постојат книги со решени проблеми од ова подрачје, кои би ја илустрирале на соодветен и задоволителен начин теоријата од роботиката. Оваа збирка претставува скроман напор на авторот барем малку да се надмине ваквата состојба.

Збирката опфаќа пет поглавја и 135 целосно решени проблеми, не вклучувајќи ги тука проблемите од првиот дел. Првото поглавје, наречено Прашања и одговори, е дадено наместо увод и содржи 60 основни прашања и куси проблеми од целокупната проблематика на Збирката, како и 66 прашања со избор на одговор. Многу лесно, ова поглавје може да биде дадено и последно, за проверка на стекнатото знаење. Второто поглавје, со 66 решени задачи, е најголемо и ја опфаќа кинематиката на роботските манипулатори. Решените задачи го илустрираат претставувањето на положбата на роботските манипулатори во просторот, нивната директна и инверзна кинематика, како и соодветната D-H конвенција. Третото поглавје со 25 одбрани и решени задачи илустрира дополнителни основни поими од областа на роботиката, какви што се поимите за диференцијални движења и брзини на роботските манипулатори, Јакобијан на роботската рака и сингуларитети на роботските манипулатори. Четвртото поглавје со 29 решени проблеми ги покрива основите од подрачјето на динамиката и статистичките сили кај роботските манипулатори, додека петтото подрачје со 15 решени проблеми ги илустрира основите на планирањето траектории на движење на роботските раце. Имајќи на ум дека ова е само почетен напор да се илустрираат многубројните аспекти на теоријата на роботските манипулатори, авторот се надева дека во иднина второто издание на оваа збирка ќе биде значително проширено со дополнителни примери и решени проблеми од областа на роботиката. Бидејќи првенствена цел на збирката е да даде увод во областа на роботиката, тука не се опфатени многу други битни области од роботиката, какви што се, на пример, управувањето со роботски манипулатори, роботските сензори и актуатори, или роботскиот систем за гледање. Тие излегуваат надвор од рамките на овој труд.

Авторот им заблагодарува на рецензентите за нивниот труд и полезните забелешки.

Авторот,

Скопје, мај 2016

*Even if you are on the right track, you will get run over if
you just sit there.*

Will Rogers

ДУРИ И АКО СТЕ НА ВИСТИНСКИОТ ПАТ, ЌЕ ВЕ ПРЕГАЗАТ АКО САМО
СТОИТЕ ВО МЕСТО.

ВИЛ РОЏЕРС

СОДРЖИНА

1. ВОВЕД	1
2. КИНЕМАТИКА НА ЕДНА РОБОТСКА РАКА	25
3. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ДВИЖЕЊА И БРЗИНИ	125
4. ДИНАМИКА НА ЕДНА РОБОТСКА РАКА	195
5. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИИ НА ЕДНА РОБОТСКА РАКА	261
6. ЛИТЕРАТУРА	299

1. ПРАШАЊА

1. Многу кусо и јасно одговорете на поставените прашања.

1.1. Што е робот?

Одговор: Робот е механизам, управуван од некој вид процесор (пресметувач), кој е во состојба самостојно (без учество на човекот) да извршува одредени движења (поседува одреден број степени слобода на движење) и задачи.

1.2. Извршете класификација на роботите според RIA (ROBOTICS INSTITUTE OF AMERICA).

Фиксни секвенцијални работи – извршуваат фиксно одредена низа последователни дејствија според однапред зададен и неменлив редослед.

Нефиксни секвенцијални работи – исто како претходните, само што низата последователни дејствија што ги извршуваат овие работи лесно може да се модифицира.

Работи кои го повторуваат движењето од човек-оператор – роботот го запаметува движењето на човекот оператор и го повторува. Роботите од оваа класа дејствуваат во согласност со запаметената информација.

Нумерички управувани работи – движењето на роботот се задава преку одреден програм вграден во роботот.

Интелигентни работи – робот кој е во состојба успешно да се прилагодува кон промените во средината

1.3. Што е роботиката?

Одговор: Роботиката е наука за проектирање и примена на работи за извршување задачи и дејствија во човечка околина.

1.4. Наведете ги основните елементи на една роботска рака и нивната функција.

Манипулатор (роботска рака) или количка – тело на роботот кое се состои од краци, зглобови и други структурни елементи.

Краен извршен елемент – се приклучува на последниот зглоб од роботската рака и служи за фаќање предмети, поврзување со други машини, изведување на одредени задачи.

Актуатори – се „мускулите“ на манипулаторите: сервомотори, чекорни мотори, пневматски и хидраулични цилиндри.

Сензори – обезбедуваат информации за внатрешната состојба на роботот или за надворешната средина.

Управувачки елемент – “рбетен мозок“ на роботот; ја управува работата на актуаторите и го координира движењето на роботот врз основа на повратните информации од внатрешните сензори.

Процесор – „мозокот“ на роботот.

1.5. Какви видови зглобови се можни кај еден робот?

Одговор: Роботите можат да поседуваат различни видови зглобови како, на пример, линеарни, ротациони, лизгачки или сферни. Иако сферните зглобови се сретнуваат кај многу системи, тие по правило не се применуваат во роботиката, освен за истражувачки цели, бидејќи поседуваат повеќе степени слобода на движење и како такви тешко се управуваат. Најчесто роботите поседуваат линеарни (призматични) или ротациони зглобови.

1.6. Наведете ги основните конфигурации на една роботска рака.

Правоаголен робот (3P)	три линеарни (транслаторни) зглоба
Цилиндричен робот (R2P)	два призматични (транслаторни) зглоба и еден ротационен
Сферен робот (2RP)	два ротациони и еден транслаторен зглоб
Антропоморфен робот (3R)	три ротациони зглобови
SCARA робот	два паралелни ротациони зглоба, кои му овозможуваат да се движи во хоризонтална рамнина и еден призматичен, кој му овозможува да се движи вертикално

1.7. Каква е конфигурацијата на една SCARA роботска рака?

Одговор: SCARA роботите поседуваат два ротациони и еден призматичен зглоб. Ротационите зглобови се поставени паралелно, и на раката ѝ овозможуваат движење во хоризонталната рамнина, додека призматичниот зглоб се движи вертикално.

1.8. Дадена е роботска рака со три степени слобода на движење долж x , y и z -оската. Дали ваквата роботска рака може да ја менува ориентацијата на еден објект во просторот?

Одговор: Не. Со ваков робот не може да се зададе никаква ориентација на еден објект во просторот. Сè што може роботот е да го поместува објектот паралелно со координатните оски, додека ориентацијата на објектот постојано останува иста.

1.9. Дадена е роботска рака со пет степени слобода на движење, која може да ротира околу сите три оски, но може да се поместува само долж x и y -оската. Дали со ваква роботска рака еден објект може слободно да се ориентира и позиционира во просторот?

Одговор: Со ваква роботска рака еден објект може слободно да се ориентира во просторот, но не може да се поместува долж z-оската.

1.10. Дали роботски систем со седум степени слобода на движење има единствено решение? Што значат седум степени слобода на движење на една роботска рака?

Одговор: Систем со седум степени слобода на движење нема единствено решение. Тоа значи дека робот со седум степени слобода на движење може на бесконечен број начини да позиционира и ориентира еден објект во просторот.

1.11. Колку степени слобода на движење има цврсто тело во просторот? Објаснете!

Одговор: Цврсто тело во тридимензионален простор има 6 степени слобода на движење – 3 за позиционирање и 3 за ориентирање во просторот.

1.12. Колку степени слобода на движење има роботска рака поставена на количка или подвижна лента?

Одговор: Роботска рака поставена на количка или подвижна лента има дополнителен степен слобода на движење, што значи дека роботот може да ја оствари саканата положба од бесконечно многу различни позиции на лентата или количката. Меѓутоа, оваа дополнителната слобода на движење не се зема предвид при управувањето на роботот, затоа што релативната положба на основата на роботот во однос на подвижната платформа секогаш е позната.

1.13. Колку степени слобода на движење има човечката рака? Објаснете.

Одговор: Човечката рака има 7 степени слобода на движење, иако опсегот на некои движења е многу мал: рамото има 3 степени слобода на движење, лакотот има само еден степен слобода на движење и шаката има 3 степени слобода на движење.

1.14. Што значи $\frac{1}{2}$ степен слобода на движење на еден зглоб?

Одговор: Зглобот може да завземе само одредени положби од неговиот работен простор.

1.15. Наведете пример на робот со $\frac{1}{2}$ степен слобода на движење.

Доколку променливата на еден зглоб од дадена роботска рака прима само одреден конечен број вредности, таквиот зглоб има ограничена слобода на движење и му се доделува само $\frac{1}{2}$ степен слобода на движење. На пример, кога еден ротационен зглоб може да се најде само во положба на која одговара агол од 0° , 30° , 60° и 90° , велиме дека тој зглоб има $\frac{1}{2}$ степен слобода на движење.

1.16. Колку степени слобода на движење има ротационен зглоб на роботска рака кој може да се заврти само за 30, 60 и 90 степени?

Одговор: Половина степен слобода на движење.

1.17. Кои координатни системи се дефинирани кај една роботска рака и што претставуваат тие?

Универзален референтен координатен систем – го дефинира движењето на роботот во однос на други објекти; неподвижен е.

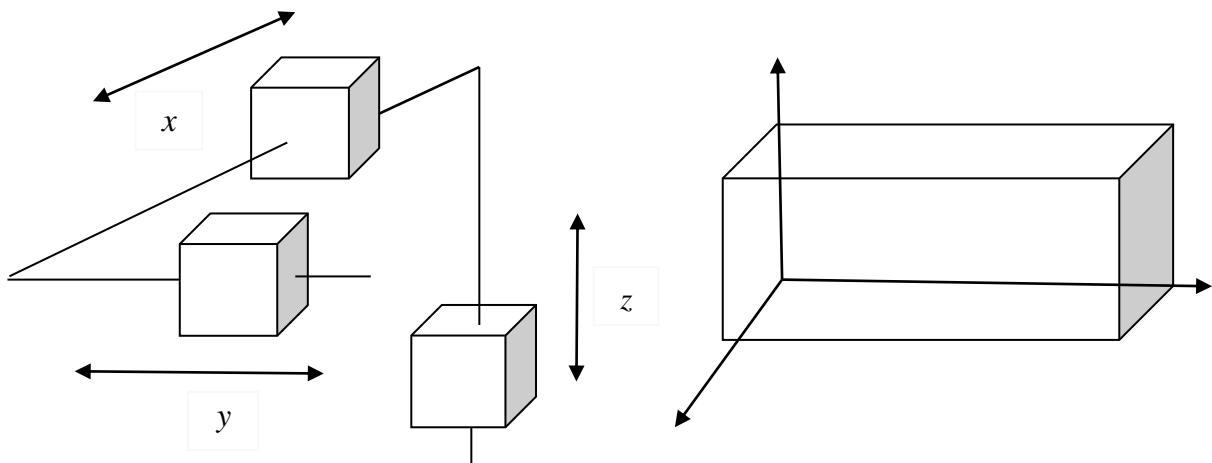
Координатен систем придружен кон зглобовите – го дефинира движењето на секој одделен зглоб.

Координатен систем продружен кон извршниот елемент – го специфицира движењето на роботската рака во однос на локалниот координатен систем придружен кон неа; се движи со раката.

1.18. Нека, под претпоставка, треба да се постават електронски елементи на некоја плоча, која секогаш е положена хоризонтално на рамна површина. Колку степени слобода на движење треба да има роботската рака која ќе ја извршува оваа задача? Објаснете.

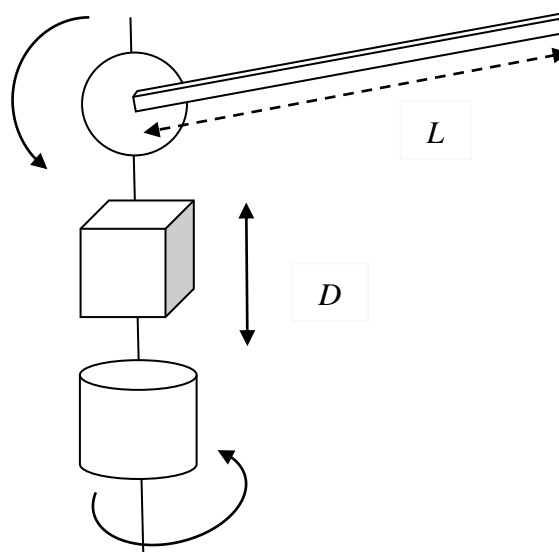
Одговор: Потребни се $3\frac{1}{2}$ степени слобода на движење: 2 за позиционирање на делот, 1 за негова ориентација и $\frac{1}{2}$ за негово поставување во плочата. Бидејќи плочата е поставена хоризонтално на позната работна површина, нејзината релативна височина во однос на основата од роботот е секогаш позната (z – координатата). Оттаму, за остварување на која и да било позиција на работната плоча доволни се само два степени слобода на движење долж x и y – оската. При произволна ориентација на електронските компоненти на хоризонталната плоча, доволен е уште еден степен слобода на движење кој ќе овозможи ротација околу z – оската. Конечно, потребен е уште $\frac{1}{2}$ степен слобода на движење заради издолжувањето на извршниот елемент при поставувањето на електронските компоненти, односно неговото собирање по нивното поставување.

1.19. Да се скицира работниот простор на роботот од Слика 1.1. Коцките означуваат транслаторни зглобови. Да се претпостави дека димензиите на деловите од роботот се верно прикажани на сликата.



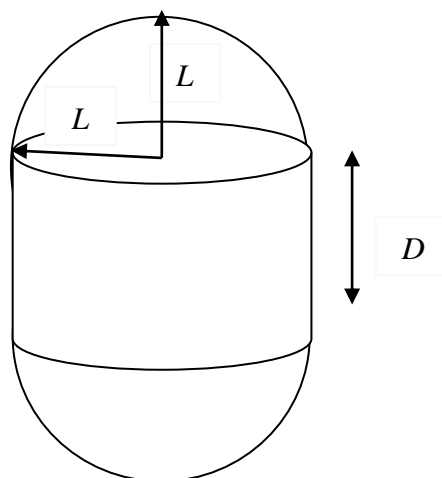
Слика 1.1. Илустрација кон Задача 1.19

1.20. Да се скицира работниот простор на роботот од Слика 1.2. Цилиндрите претставуваат цилиндрични зглобови.



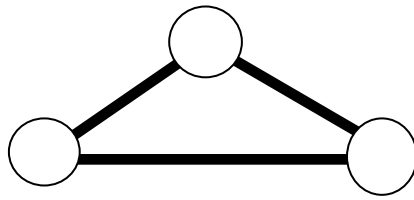
Слика 1.2. Илустрација кон Задача 1.20

Ако вториот и третиот зглоб од роботската рака се неподвижни, и третиот крак од раката е поставен во хоризонтална положба (паралелно со основата), заради фактот дека првиот зглоб може да ротира околу својата вертикална оска, раката ќе може да ги дофати сите точки од кружница со радиус еднаков на должината од третиот крак L . Ако сега се ослободи вториот зглоб, заради фактот дека тој може да се движи горе – доле долж оската од првиот зглоб, раката ќе може да ги дофати сите точки од обвивката на цилиндер со радиус на основата еднаков на должината од третиот крак L и висина еднаква на поместувањето од вториот зглоб D . Конечно, ако се ослободи и третиот зглоб, третиот крак на раката ќе може да ротира во вертикалната рамнина околу точката во која е прицврстен, и раката ќе може да ги дофати сите точки од полутопка со радиус еднаков на должината од третиот крак, чија основа е паралелна со основите од веќе споменатиот цилиндер. Работниот простор на роботот од Слика 1.2 е цилиндер чии основи се полутопки, како на Слика 1.3.



Слика 1.3. Приказ на работниот простор на роботот од Задача 1.20

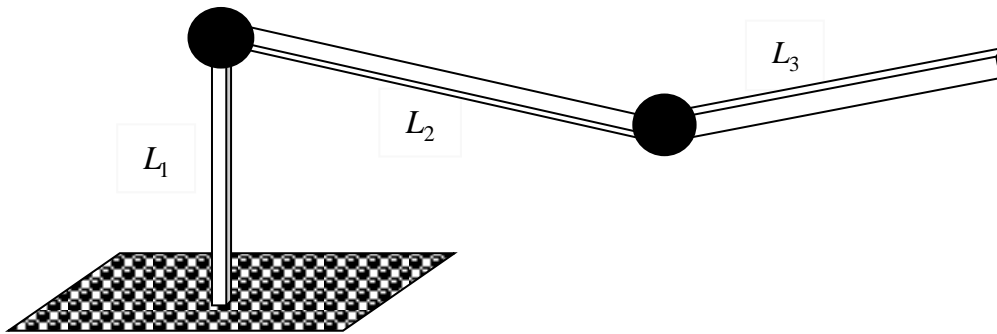
1.21. Колку степени слобода на движење има механизмот од Слика 1.4?



Слика 1.4. Илустрација кон Задача 1.21

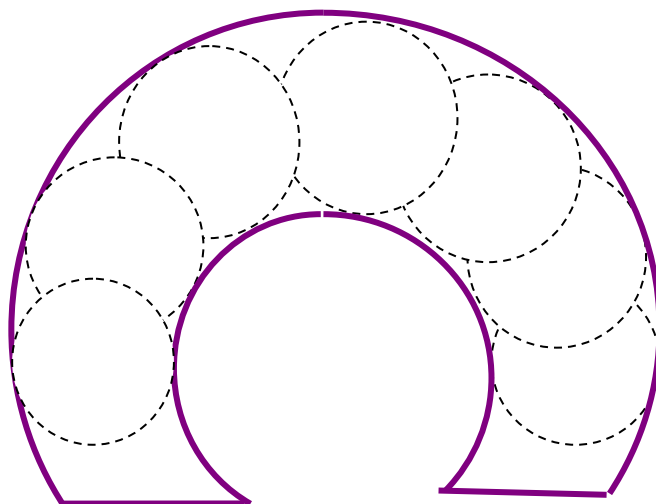
Одговор: Шест. Зглобовите се меѓусебно поврзани и не можат да се движат слободно, но целата фигура може да завземе произволна позиција и ориентација во просторот.

1.22. Да се скицира работниот простор на роботот од Слика 1.5. Притоа да се претпостави дека првиот крак е фиксен (неподвижен), додека вториот и третиот крак можат да ротираат околу хоризонтална оска нормална на рамнината на сликата. Исто така да се претпостави дека димензиите на основата и останатите делови од роботот се верно прикажани на сликата.



Слика 1.5. Илустрација кон Задача 1.22

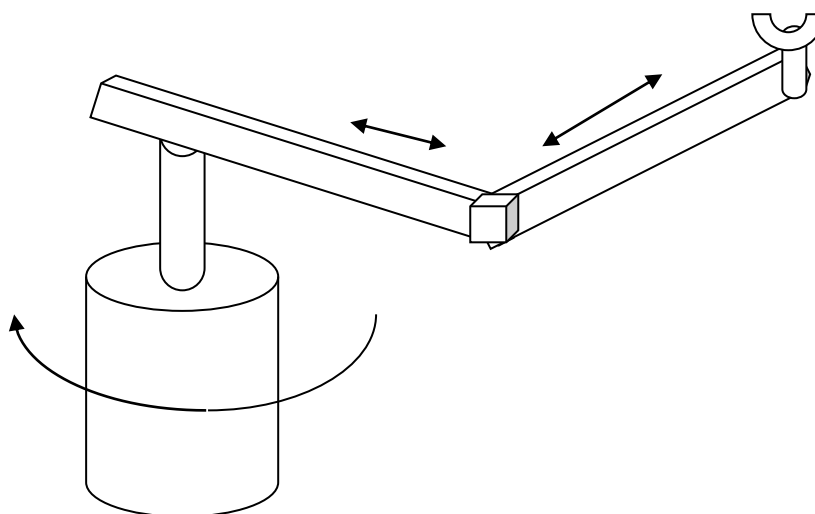
Одговор: Ако третиот крак од роботската рака се прицврсти во целосно испружена состојба (во правец на оската на вториот крак), заради фактот дека вториот крак може да ротира во вертикалната рамнина, роботската рака ќе може да ги дофати сите точки од полукружница со радиус еднаков на збирот од должините на двата крака, $L_2 + L_3$. Од друга страна, ако третиот крак се прицврсти во сосема превиткана состојба (да се поклопи со вториот крак), раката ќе може да ги дофати сите точки од кружница со радиус еднаков на разликата од должините на двата крака, $L_2 - L_3$, $L_2 > L_3$. Меѓутоа, бидејќи и третиот крак може да ротира во вертикалната рамнина, опишувајќи кружница со радиус еднаков на должината на кракот L_3 , работниот простор на роботската рака ќе ја опфати и внатрешноста помеѓу споменатите две кружници со радиуси $L_2 - L_3$ и $L_2 + L_3$, и ќе наликува на дел од прстен или ѓеврек, како што е прикажано на Слика 1.6. Фигурата не е полн торус, затоа што вториот крак е подолг од првиот, $L_2 > L_1$, и вториот крак фактички може да се заврти само за следните агли $\arccos \frac{L_1}{L_2} \leq \theta_2 \leq 2\pi - \arccos \frac{L_1}{L_2}$, за разлика од третиот кој може да се заврти за агол од 2π радијани.



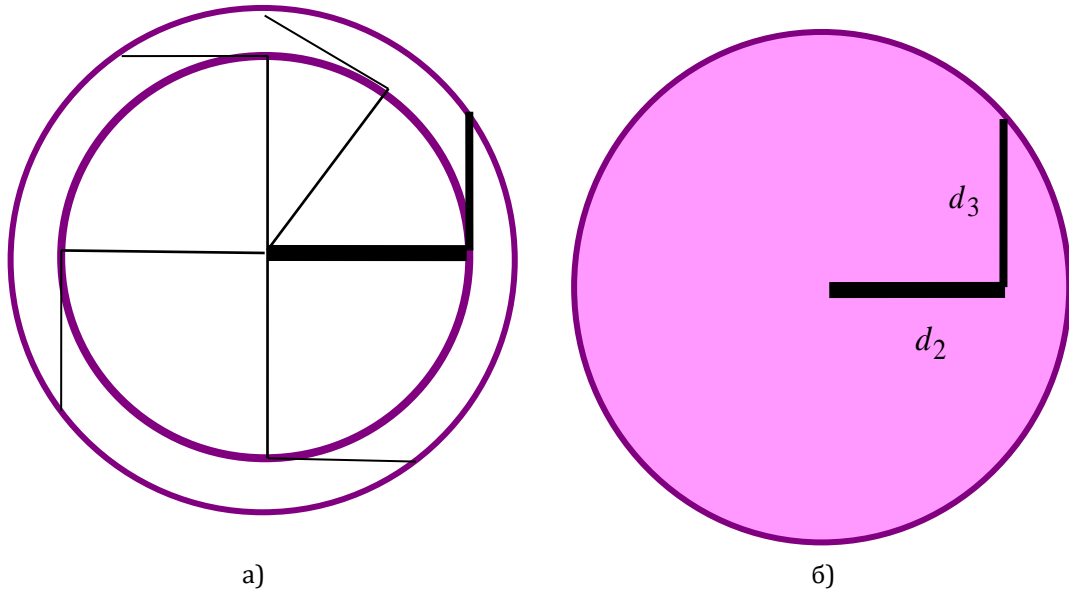
Слика 1.6. Приказ на работниот простор на роботот од Задача 1.22

1.23. Што претставува работниот простор на роботот од долната слика?

Одговор: На Слика 1.7 е прикажан цилиндричен робот. Заради поставеноста на краците од роботот во иста рамнина и под прав агол, неговиот работен простор ќе претставува површина во хоризонталната рамнина паралелна со основата. Ако вториот крак е неподвижен, а третиот се поместува транслаторно од едната до втората своја крајна положба, роботот ќе може да ги дофати сите точки од прстен со внатрешен радиус еднаков на должината од вториот крак и надворешен радиус еднаков на квадратниот корен од збирот на квадратите од должините на вториот и третиот крак, како што е прикажано на Слика 1.8.а. Меѓутоа, бидејќи и вториот крак може транслаторно да се поместува, работниот простор на набљудуваниот цилиндричен робот од Слика 1.7 ќе претставува кружница паралелна со основата од роботот, со радиус еднаков на квадратниот корен од збирот на квадратите од должините на вториот и третиот крак, како што е покажано на Слика 1.8.б.



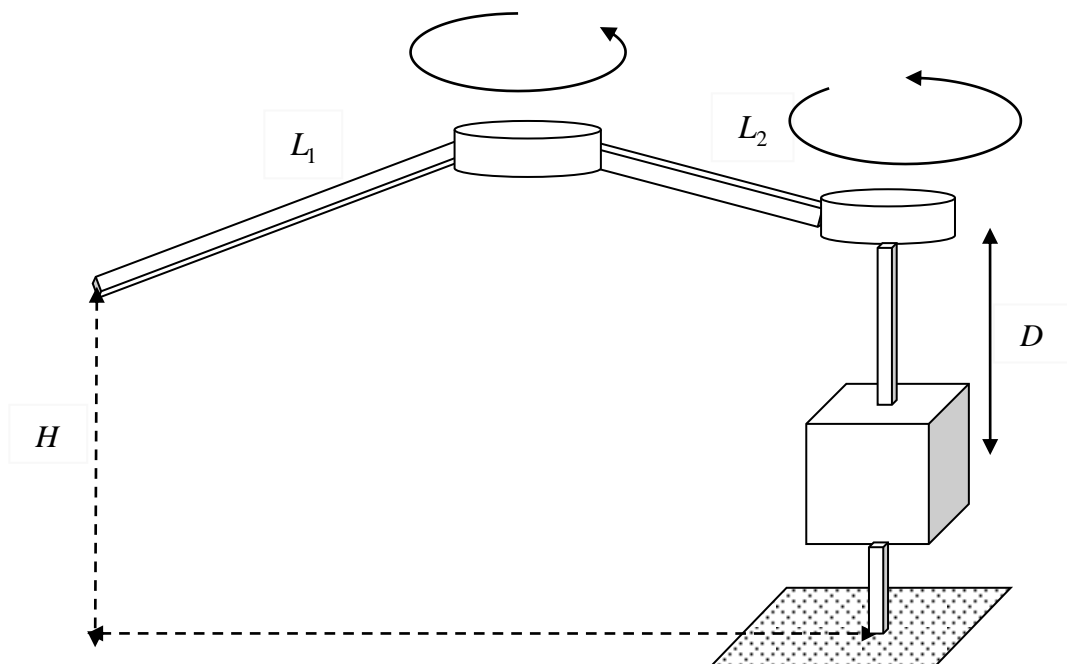
Слика 1.7. Илустрација кон Задача 1.23



Слика 1.8. Исцртување на работниот простор на роботот од Задача 1.23

1.24. Што претставува работниот простор на роботот од Слика 1.9?

Одговор: Бидејќи двата ротациони зглоба на дадената роботска рака лежат во иста хоризонтална рамнина, работниот простор на роботот од Слика 1.9 ќе претставува цилиндер со височина еднаква на D и радиус на основата $L_1 + L_2$.

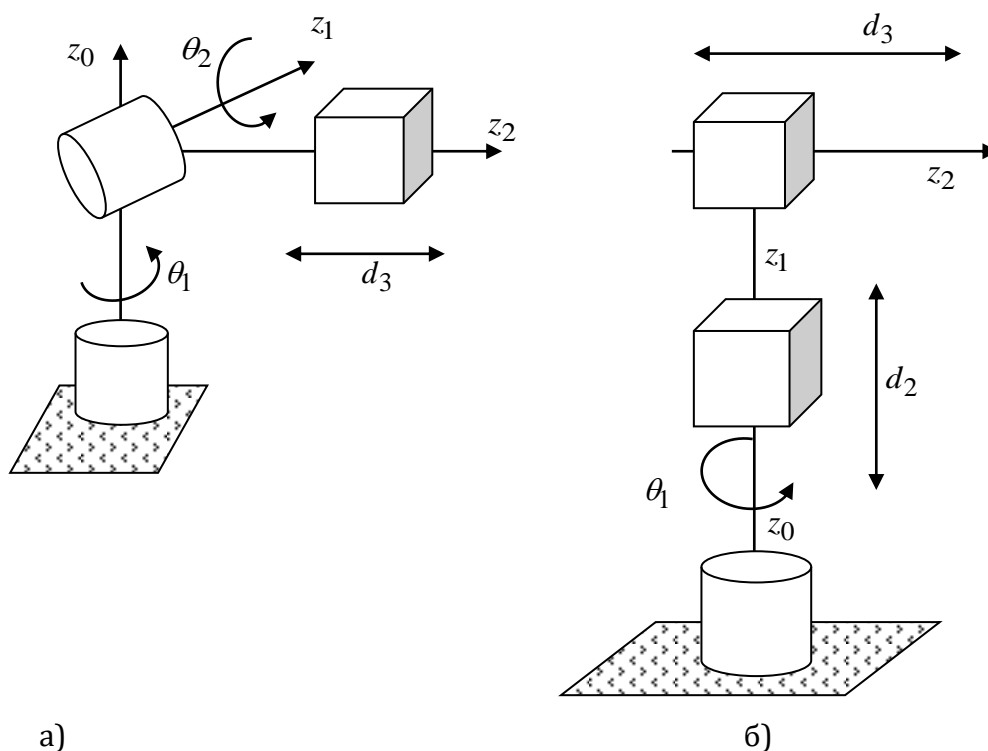


Слика 1.9. Илустрација кон Задача 1.24

1.25. Нека, под претпоставка, една роботска рака е поставена на саканата позиција, но сèуште ја нема саканата ориентација. Што треба да се направи за да се постигне саканата ориентација на роботската рака, без да се промени нејзината позиција?

Одговор: Положбата на една роботска рака во просторот се одредува преку положбата на подвижен координатен систем придружен кон неа. Позицијата на роботската рака во просторот во однос на даден фиксен референтен координатен систем е определена со положбата на координатниот почеток од подвижниот координатен систем придружен кон раката, додека ориентацијата на роботската рака е дефинирана со ориентацијата на истиот тој координатен систем. За да се постигне саканата ориентација на роботската рака во просторот, без да се промени нејзината позиција, потребно е таа да се ротира околу координатните оски од подвижниот координатен систем придружен со неа. (Евентуалната ротација околу оските од референтниот координатен систем би довела до промена и на позицијата од роботската рака, што е исклучено со претпоставките од задачата.)

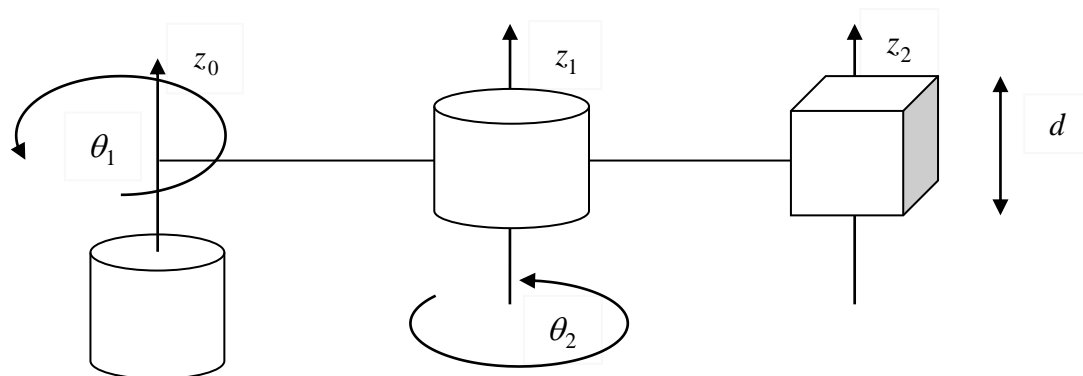
1.26. Определете ја конфигурацијата на роботските раце од долната слика.



Слика 1.10. Илустрација кон Задача 1.26

а) Сферна. б) Цилиндрична.

1.27. На долната слика е прикажана една SCARA роботска рака. Каква е нејзината конфигурација? По што се разликува од роботската рака од горната слика под а)?



Слика 1.11. Илустрација кон Задача 1.27

Одговор: Дадената роботска рака е сферна. Таа се разликува од роботската рака на Слика 1.10.а и по изглед и по примена. Кај сферната роботска рака z_0 оската е нормална на z_1 и z_2 оските. Кај SCARA роботска рака сите три оски се паралелни.

1.28. Која од наведените матрици не претставува трансформациона матрица на една роботска рака? Објаснете!

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & C_1S_2 & C_1S_2d_3 - S_1d_2 \\ S_1C_2 & C_1 & S_1S_2 & S_1S_2d_3 + C_1d_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & C_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & C_1S_2 & C_1S_2d_3 - S_1d_2 \\ S_1C_2 & C_1 & S_1S_2 & S_1S_2d_3 + C_1d_2 \\ -S_2 & 0 & 1 & C_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Одговор: Матрицата \mathbf{T}_4 , бидејќи збирот од квадратите на првите три елементи во третата колона од матрицата не е еднаков на 1.

1.29. Дадена е хомогената трансформациона матрица:

$${}^A\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{R}_B & {}^A\mathbf{P}_B \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Да се изрази нејзината инверзна матрица ${}^B\mathbf{T}_A$ во функција од ${}^A\mathbf{R}_B$ и ${}^A\mathbf{P}_B$.

Одговор: Од дефиницијата на инверзна матрица $\mathbf{M}^{-1} = (\det \mathbf{M})^{-1} \text{adj} \mathbf{M}$ непосредно следува:

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{T}_A &= ({}^A\mathbf{T}_B)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{R}_B & {}^A\mathbf{P}_B \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [\det({}^A\mathbf{T}_B)]^{-1} \text{adj}({}^A\mathbf{T}_B) = \\ &= ({}^A\mathbf{R}_B)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -{}^A\mathbf{P}_B \\ \mathbf{0} & {}^A\mathbf{R}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^A\mathbf{R}_B)^{-1} & -({}^A\mathbf{R}_B)^{-1} {}^A\mathbf{P}_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} ({}^A\mathbf{R}_B)^T & -({}^A\mathbf{R}_B)^T {}^A\mathbf{P}_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{R}_A & {}^B\mathbf{P}_A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.30. Дадени се три координатни системи, $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$, чија меѓусебна ориентација е опишана со ротационите матрици ${}^1\mathbf{R}_2$, ${}^1\mathbf{R}_3$ и ${}^2\mathbf{R}_3$. Ако се дадени матриците:

$${}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$${}^1\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

да се определи матрицата ${}^2\mathbf{R}_3$.

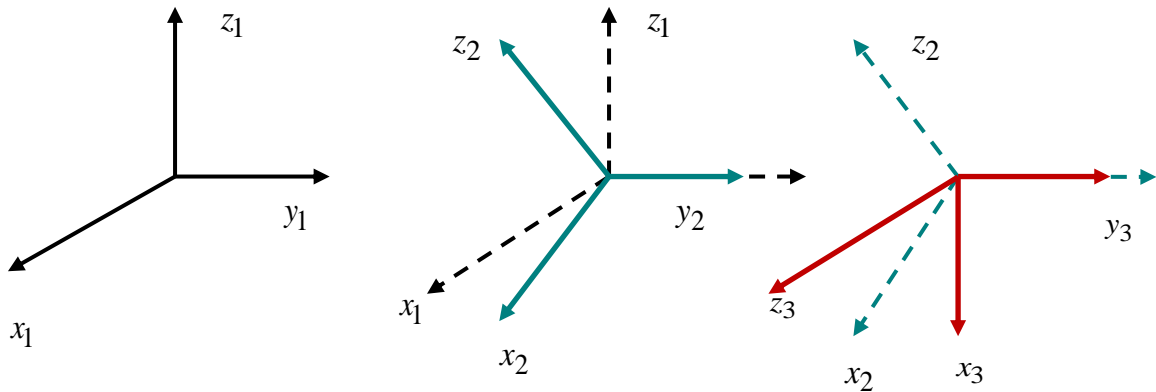
Решение:

$${}^2\mathbf{R}_3 = ({}^1\mathbf{R}_2)^{-1} \times ({}^1\mathbf{R}_3) = ({}^2\mathbf{R}_1) \times ({}^1\mathbf{R}_3) \quad (1.9)$$

Бидејќи ${}^1\mathbf{R}_2$ е ротациона матрица, $({}^1\mathbf{R}_2)^{-1} = ({}^1\mathbf{R}_2)^T$. Следствено:

$${}^2\mathbf{R}_3 = ({}^1\mathbf{R}_2)^T \times ({}^1\mathbf{R}_3) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Резултатот е многу појасен ако проблемот се претстави графички, од каде може да се види дека координатниот систем $\{2\}$ е заротиран околу y -оската за агол од 45^0 во однос на координатниот систем $\{1\}$, додека координатниот систем $\{3\}$ е заротиран на ист начин во однос на координатниот систем $\{2\}$, па координатниот систем $\{3\}$ е заротиран околу y -оската за агол од 90^0 во однос на координатниот систем $\{1\}$.



Слика 1.12. Графичко решение на Задача 1.30

1.31. Подвижен координатен систем ${}^U\mathbf{F}$ е подложен на следните елементарни трансформации во наведениот редослед:

- ротација за агол γ околу x -оската
- ротација за агол од β околу z -оската
- ротација за агол од α околу y -оската

Да се определи (без пресметување) неговата вкупна трансформација во однос на референтниот координатен систем U .

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rot}(y, \alpha) \times \mathbf{Rot}(z, \beta) \times \mathbf{Rot}(x, \gamma) \quad (1.11)$$

1.32. Подвижен координатен систем ${}^U\mathbf{F}$ е подложен на следните елементарни трансформации во наведениот редослед:

- ротација за агол β околу x -оската

- ротација за агол α околу z – оската
- ротација за агол γ околу n – оската

Да се определи (без пресметување) неговата вкупна трансформација во однос на референтниот координатен систем U .

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rot}(z, \alpha) \times \mathbf{Rot}(x, \beta) \times \mathbf{Rot}(n, \gamma) \quad (1.12)$$

1.33. Подвижен координатен систем U_F е подложен на следните елементарни трансформации во наведениот редослед:

- ротација за агол β околу x – оската
- ротација за агол од γ околу a – оската
- ротација за агол од δ околу n – оската
- ротација за агол од α околу z – оската

Да се определи (без пресметување) неговата вкупна трансформација во однос на референтниот координатен систем U .

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rot}(z, \alpha) \times \mathbf{Rot}(x, \beta) \times \mathbf{Rot}(a, \gamma) \times \mathbf{Rot}(n, \delta) \quad (1.13)$$

1.34. Подвижен координатен систем U_F е подложен на следните елементарни трансформации во наведениот редослед:

- ротација за агол γ околу x – оската
- ротација за агол од β околу z – оската
- ротација за агол од δ околу n – оската
- ротација за агол од α околу y – оската

Да се определи (без пресметување) неговата вкупна трансформација во однос на референтниот координатен систем U .

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rot}(y, \alpha) \times \mathbf{Rot}(z, \beta) \times \mathbf{Rot}(x, \gamma) \times \mathbf{Rot}(n, \delta) \quad (1.14)$$

1.35. Да се определи трансформационата матрица која го претставува вкупното движење на еден подвижен координатен систем по следните елементарни трансформации во наведениот редослед:

- ротација за агол α околу n – оската,
- транслација за b единици долж n – оската
- транслација за d единици долж a – оската
- ротација за агол θ околу a – оската

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rot}(n, \alpha) \times \mathbf{Trans}(b, 0, 0) \times \mathbf{Trans}(0, 0, d) \times \mathbf{Rot}(a, \theta) =$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & b \\ C\alpha S\theta & C\alpha C\theta & -S\alpha & -dS\alpha \\ S\alpha S\theta & S\alpha C\theta & C\alpha & dC\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

1.36. Дали движењето на еден робот во цилиндричен координатен систем, кое се состои од две линеарни транскации и една ротација во однос на референтниот координатен систем, ќе предизвика промена на ориентацијата на подвижниот координатен систем? Објаснете!

Одговор: Да. Заради ротацијата околу z -оската, ориентацијата на подвижниот координатен систем се менува.

1.37. Кои трансформации, околу кои оски и во кој редослед се потребни за да се „одротираат“ сферните координати и да се постават истите паралелно со референтниот координатен систем?

- Ротација околу o -оската за агол $-\beta$
- Ротација околу a -оската за агол $-\gamma$

$$\mathbf{T}_{sph}(r, \beta, \gamma) \cdot \mathbf{Rot}(o, -\beta) \cdot \mathbf{Rot}(a, -\gamma) \quad (1.16)$$

1.38. Наведете ги сите можни тројки Ојлерови агли. Дали се можни ZZY Ојлерови агли?

Решение:

X-Y-Z	Y-Z-X	Z-X-Y
X-Y-X	Y-Z-Y	Z-X-Z
X-Z-Y	Y-X-Z	Z-Y-X
X-Z-X	Y-X-Y	Z-Y-Z

За да може да се претстави произволна ротација во просторот, потребни се три елементарни ротации околу три различни оски. Затоа ZZY Ојлерови агли не се можни, бидејќи две последователни ротации околу Z -оската значат всушност ротација околу иста оска.

1.39. Дали со RPY ротациите локалниот (подвижниот) координатен систем ја менува својата позиција во просторот? Објаснете!

Одговор: Не, бидејќи движењата поврзани со RPY ротациите се во однос на подвижниот координатен систем.

1.40. Изведете ја ротационата матрица \mathbf{R}_{xyz} која одговара на XYZ Ојлеровите агли.

Решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xyz} &= \mathbf{Rot}(n, \varphi) \mathbf{Rot}(o, \theta) \mathbf{Rot}(a, \psi) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\varphi & -S\varphi \\ 0 & S\varphi & C\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta C\psi & -C\theta S\psi & S\theta \\ C\phi S\psi + S\phi S\theta C\psi & C\phi C\psi - S\phi S\theta S\psi & -S\phi C\theta \\ S\phi S\psi - C\phi S\theta C\psi & S\phi C\psi + C\phi S\theta S\psi & C\phi C\theta \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

1.41. Изведете ја ротационата матрица \mathbf{R}_{xzy} која одговара на XZY Ојлеровите англи.

Решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xzy} &= \mathbf{Rot}(n, \phi)\mathbf{Rot}(a, \theta)\mathbf{Rot}(o, \psi) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\phi & -S\phi \\ 0 & S\phi & C\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\psi & 0 & S\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\psi & 0 & C\psi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\theta C\psi & -S\theta & C\theta S\psi \\ S\phi S\psi + C\phi S\theta C\psi & C\phi C\theta & -S\phi S\psi + C\phi S\theta S\psi \\ -C\phi S\psi + S\phi S\theta C\psi & C\phi C\theta & C\phi C\psi + S\phi S\theta S\psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.42. Изведете ја ротационата матрица \mathbf{R}_{zyx} која одговара на ZYX Ојлеровите англи.

Решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{zyx} &= \mathbf{Rot}(a, \phi)\mathbf{Rot}(o, \theta)\mathbf{Rot}(n, \psi) = \\ &= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ 0 & S\psi & C\psi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.43. Последователни трансформации на еден подвижен координатен систем се опишани со следните матрици:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

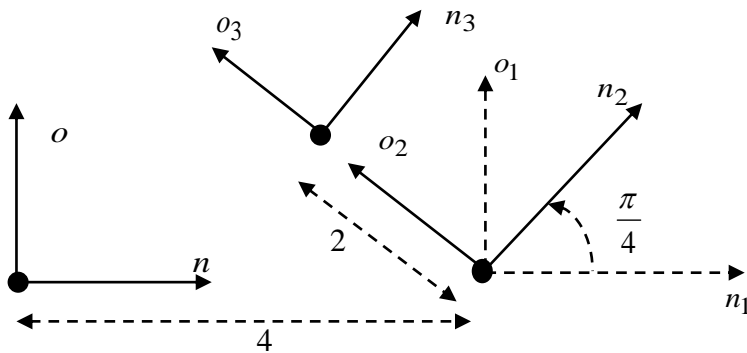
$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

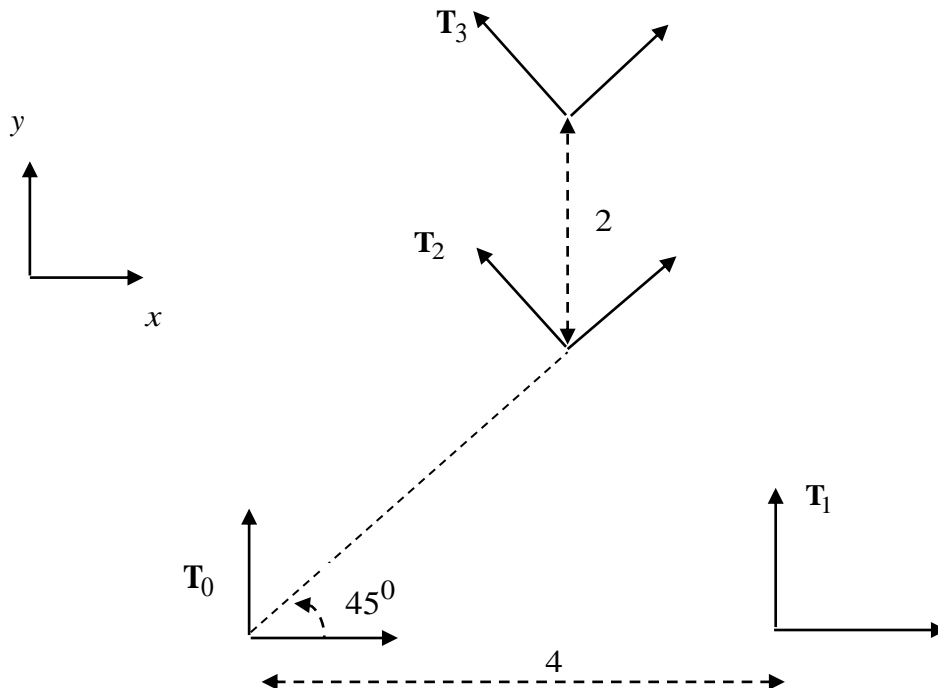
а) Под претпоставка дека матриците опишуваат движења околу оските на подвижниот координатен систем, да се скицираат последователните положби на набљудуваниот координатен систем.

б) Под претпоставка дека матриците опишуваат движења околу оските на референтниот координатен систем, да се скицираат последователните положби на набљудуваниот координатен систем.

Решение: (а)



(б)



Слика 1.13. Решение на Задача 1.43

1.44. За дадена ротациона матрица \mathbf{R} , да се определат Ојлеровите ZYX агли со кои ќе се оствари истата ориентација.

Решение:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{ZYX} \quad (1.23)$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{11} & r_{11} \\ r_{11} & r_{11} & r_{11} \\ r_{11} & r_{11} & r_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{Rot}^{-1}(x, \phi) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}(x, \phi) \cdot \mathbf{R}_{ZYX} \quad (1.25)$$

$$\begin{bmatrix} r_{11}C\phi + r_{21}S\phi & r_{12}C\phi + r_{22}S\phi & r_{13}C\phi + r_{23}S\phi \\ -r_{11}S\phi + r_{21}C\phi & -r_{12}S\phi + r_{22}C\phi & -r_{13}S\phi + r_{23}C\phi \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & S\theta S\psi & S\theta C\psi \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\phi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

$$\theta = \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33}) \quad (1.27)$$

1.45. Да се состави програм за пресметување на RPY аглите со помош на кои се постига дадена ориентација \mathbf{R} .

% Zadavanje na elementite od matricata R

```
>> fi=atan2(R(2,1),R(1,1))
>> teta=atan2(-R(3,1),sqrt(R(1,1)*2+R(2,1)^2));
>> psi=atan2(R(3,2),R(3,3))
>> ROLL=fi;
>> PITCH=teta;
>> YAW=psi;
>> [R,P,Y]=[ROLL,PITCH,YAW]'
```

1.46. Кој е главниот недостаток на D-H моделот на еден робот?

Одговор: Основниот проблем кај D-H моделот произлегува од фактот дека сите движења се во однос на x- и z-оската, што значи дека тој не може да претставува никакво движење во однос на y-оската.

1.47. Како се поставува соодветната x-оска при составувањето D-H модел на еден робот, ако z-оските на два соседни зглоба се паралелни? Објаснете!

Одговор: Ако z-оските на два соседни зглоба се паралелни, соодветната x-оска се поставува во правец на заедничката нормала која е колинеарна со заедничката нормала од претходниот зглоб.

1.48. Што претставува инверзната кинематска задача кај еден робот?

Одговор: Одредување на движењата на одделните зглобови на дадена роботска рака со кои истата ќе се најде во саканата, однапред зададена положба во просторот (пресметување на вредностите на променливите на роботската рака врз основа на координатите на нејзината сакана положба).

1.49. Како се одредува (поставува) x -оската кај еден D-H модел кога z -оските на два соседни зглоба се сечат?

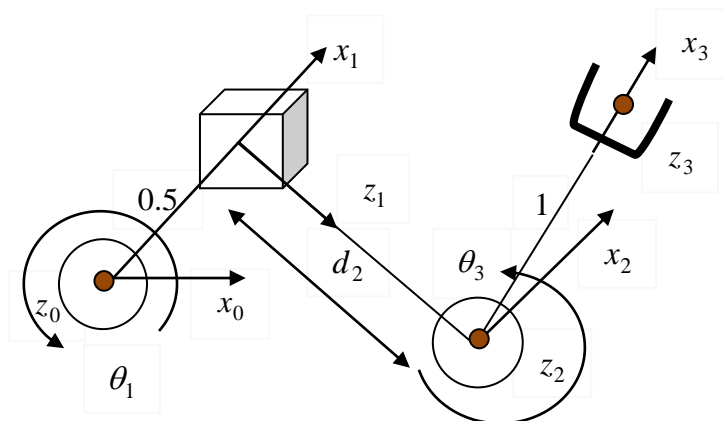
Одговор: Кога z -оските на два соседни зглоба се сечат, не постои нивна заедничка нормала (истата има нулева должина), па x -оската на набљудуваниот зглоб се поставува долж правата нормална на рамнината која ја формираат двете z -оските што се сечат.

1.50. Да се нацрта роботската рака која одговара на дадените D-H параметри за нулева вредност на аглите θ_1 и θ_3 .

Табела 1.1. D-H параметри на роботската рака од Задача 1.49

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0.5	90°
2	0	d_2	0	-90°
3	θ_3	0	1	0

Решение: Првиот зглоб се поставува произволно, така што неговата оска на ротација да излегува од рамнината на листот. Тој е ротационен зглоб со променлива θ_1 . Вториот зглоб е транслаторен, со променлива d_2 . Од Табела 1.1 се гледа дека оските на движење на првиот и вториот зглоб се нормални една на друга, но не се сечат, туку се нарастојание 0.5 една од друга. Третиот зглоб е ротационен со променлива θ_3 . Неговата оска на ротација е нормална на оската на движење на транслаторниот зглоб и паралелна со оската на ротација на првиот зглоб. Должината на третиот крак е 1.



Слика 1.14. Решение на Задача 1.50

1.51. Што се подразбира под поимот диференцијални движења?

Одговор: Под поимот диференцијални движења се подразбираат многу мали движења на еден механизам, во овој случај роботска рака, односно движења за мал интервал на време dt . Диференцијалните движења на една роботска рака можат да бидат диференцијални транслации, диференцијални ротации или комбинација од диференцијални транслации и ротации (диференцијални трансформации).

1.52. Што дефинира Јакобијанот на една роботска рака?

Одговор: Со Јакобијанот на една роботска рака со повеќе степени слобода на движење е определена врската помеѓу диференцијалното движење на зглобовите од раката и диференцијалното движење на самата рака.

1.53. Која е врската помеѓу Јакобијанот и диференцијалниот оператор на една роботска рака?

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{D} \rightarrow \Delta \rightarrow d\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_{nova} = \mathbf{T}_{stara} + d\mathbf{T} \quad (1.28)$$

Врз основа на познат Јакобијан и зададени диференцијални движења на зглобовите од набљудуваната роботска рака може да се пресмета матрицата \mathbf{D} , чии елементи се диференцијалните движења на раката: $dx, dy, dz, \delta x, \delta y, \delta z$. Со помош на овие вредности се пресметува диференцијалниот оператор на роботот Δ , а преку него се пресметува диференцијалната промена $d\mathbf{T}$ на координатниот систем на роботската рака \mathbf{T} . Матрицата $d\mathbf{T}$ овозможува да се пресмета новата положба и ориентација на координатниот систем на раката од роботот предизвикана од диференцијалните движења во нејзините зглобови.

1.54. Што се подразбира под диференцијална транслација на еден подвижен координатен систем во однос на даден референтен систем?

Одговор: Под диференцијална транслација на еден подвижен координатен систем се подразбира транслаторно движење на тој координатен систем долж координатните оски на референтниот координатен систем за многу мали (диференцијални) вредности dx, dy и dz .

1.55. Што се подразбира под диференцијална ротација на еден подвижен координатен систем во однос на даден референтен систем?

Одговор: Под диференцијална ротација се подразбира многу мала ротација на подвижниот координатен систем околу некоја од оските на референтниот координатен систем.

1.56. Што претставуваат елементите на матрицата на центрифугални сили?

Одговор: Елементите на матрицата на центрифугални сили ги претставуваат центрифугалните сили кои дејствуваат во еден зглоб како резултат од дејството на брзината на другите зглобови.

1.57. Што претставуваат сингуларитетите на една роботска рака?

Одговор: Сингуларитетите на една роботска рака претставуваат конфигурации од кои не се достапни одредени правци на движење.

1.58. На што е еднаков изводот од втор ред U_{623} во случајот на роботска рака со шест степени слобода на движење, ако тој се изрази преку соодветните A и Q матрици?

$$\begin{aligned} U_{623} &= \frac{\partial U_{62}}{\partial q_3} = \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\partial^0 T_6}{\partial q_2} \right) = \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{\partial (A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6)}{\partial q_2} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 Q_2 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6) = A_1 Q_2 A_2 Q_3 A_3 A_4 A_5 A_6 \end{aligned} \quad (1.29)$$

1.59. Колку изнесуваат коефициентите на полином од трет степен со кој се опишува една траекторија, ако граничните услови се: $t_i = 0$, $\theta(t_i) = \theta_i$, $\theta(t_f) = \theta_f$, $\dot{\theta}(t_i) = \dot{\theta}_i$, $\dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f$?

$$\theta(t_i) = c_3 t_i^3 + c_2 t_i^2 + c_1 t_i + c_0 = c_0 = \theta_i$$

$$\theta(t_f) = c_3 t_f^3 + c_2 t_f^2 + c_1 t_f + c_0 = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(t_i) = 3c_3 t_i^2 + 2c_2 t_i + c_1 = c_1 = \dot{\theta}_i$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 3c_3 t_f^2 + 2c_2 t_f + c_1 = \dot{\theta}_f$$

$$\theta(t_f) = c_3 t_f^3 + c_2 t_f^2 + \dot{\theta}_i t_f + \theta_i = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 3c_3 t_f^2 + 2c_2 t_f + \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_f$$

$$(t_f^2)c_2 + (t_f^3)c_3 = \theta_f - \theta_i - \dot{\theta}_i t_f$$

$$(2t_f)c_2 + (3t_f^2)c_3 = \dot{\theta}_f - \dot{\theta}_i$$

$$\begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_f^2 & t_f^3 \\ 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_f - \theta_i - \dot{\theta}_i t_f \\ \dot{\theta}_f - \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{t_f^3} \begin{bmatrix} 3t_f & -t_f^2 \\ -2 & t_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_f - \theta_i - \dot{\theta}_i t_f \\ \dot{\theta}_f - \dot{\theta}_i \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

1.60. Што значи $t_b \geq \frac{t_f}{2}$, ако t_b е времето на спојување на параболичен сегмент со линеарен сегмент кај траекториите кои се состојат од линеарен сегмент и по еден параболичен сегмент на неговиот почеток и крај? Дали t_b може да биде поголемо од половината од времето на целото движење t_f ?

Одговор: Времето t_b не може да биде поголемо од половината од времето на целото движење t_f кај траекториите со линеарни и параболични сегменти. Од друга страна, $t_b = \frac{t_f}{2}$ значи дека патеката ќе се состои само од два параболични сегмента, без линеарен сегмент помеѓу нив, па роботската рака

ПРАШАЊА И ОДГОВОРИ

ќе забрзува и успорува по параболичен закон, без да постои дел од патеката на која забрзувањето ќе биде нулево.

2. Одговорете со Т (точно) или П (погрешно) на поставените прашања.

Р.БР.	ТВРДЕЊЕ	Т	П
2.1.	Роботите можат симултано да процесираат повеќе задачи.	Т	П
2.2.	Иако се супериорни од многу аспекти, роботите имаат ограничени можности во поглед на одзивот во реално време.	Т	П
2.3.	Производителите генерално ги проектираат и испорачуваат сите елементи на роботската рака, од основата до извршниот елемент.	Т	П
2.4.	Управувачкиот елемент кај роботот по својата улога може да се спореди со човечкиот мозок.	Т	П
2.5.	Бројот степени слобода на движење на една роботска рака (манипулатор) е определен со бројот зглобови на раката.	Т	П
2.6.	Движењата на извршниот елемент на една роботска рака се вклучуваат во степените слобода на движење на роботската рака.	Т	П
2.7.	Роботска рака со три степени слобода на движење долж x , y и z -оската не може да ја менува ориентацијата на еден објект во просторот.	Т	П
2.8.	Роботска рака со пет степени слобода на движење може слободно да ориентира и позиционира објект во просторот.	Т	П
2.9.	Роботски систем со седум степени слобода на движење може на бесконечен број начини да постави еден објект во просторот.	Т	П
2.10.	Сферните работи имаат три ротациони зглоба.	Т	П
2.11.	SCARA роботите имаат иста конфигурација како сферните работи.	Т	П
2.12.	Иако SCARA роботската рака има RRP структура, значително се разликува од сферната роботска рака и по изглед и по примената.	Т	П
2.13.	Кога подвижен координатен систем ротира се менуваат само координатите на неговиот почеток во однос на референтниот координатен систем.	Т	П
2.14.	Редоследот на трансформациите со кои се дефинира позицијата и ориентацијата на објект во просторот не влијае врз самата положба.	Т	П
2.15.	Новите координати на точка во однос на референтниот координатен систем се одредуваат со множење на почетните координати од десно со соодветната трансформациона(и) матрица(и).	Т	П
2.16.	Новите координати на точка во однос на подвижниот координатен систем се одредуваат со множење на почетните координати од лево со соодветната трансформациона(и) матрица(и).	Т	П

ПРАШАЊА И ОДГОВОРИ

2.17.	Во стварноста трансформацијата ${}^U T_H$, каде U означува референтен координатен систем, а H – координатен систем врзан за роботската рака е секогаш позната.	Т	П
2.18.	Детерминантата на матриците на ротација е секогаш единица.	Т	П
2.19.	Сите елементарни рамнински ротации се комутативни.	Т	П
2.20.	Елементарните транслации во тридимензионалниот простор се комутативни.	Т	П
2.21.	Елементарните ротации во тридимензионалниот простор се комутативни.	Т	П
2.22.	Цилиндричниот координатен систем вклучува транслација долж x-оската, транслација долж z-оската и ротација околу z-оската во наведениот редослед.	Т	П
2.23.	При промената на позицијата на цврсто тело претставено со цилиндрични координати се менува и ориентацијата на подвижниот координатен систем придружен со телото.	Т	П
2.24.	Совршен сензорски систем и совршен актуаторски систем значи совршен робот.	Т	П
2.25.	Позицијата на координатниот почеток од подвижен координатен систем не се менува кога тој ротира околу оските од референтниот координатен систем.	Т	П
2.26.	Првите три колони во секоја трансформациона матрица ја покажуваат ориентацијата на соодветниот објект (точка, координатен систем, цврсто тело).	Т	П
2.27.	Сферниот координатен систем вклучува ротација околу z-оската, ротација околу y-оската и транслација долж x-оската во обратен редослед.	Т	П
2.28.	За робот со три степени слобода на движење во сферни координати не може да се зададе никаква ориентација.	Т	П
2.29.	Во инверзните кинематски равенки непознати се променливите на роботот, додека крајната позиција и ориентација на роботот е позната.	Т	П
2.30.	Две решенија при одредувањето на сферни координати значат различна позиција и ориентација на подвижниот координатен систем во просторот.	Т	П
2.31.	Конечната положба на подвижен координатен систем по извршеното движење е одредена со производ од матрицата на позиција и матрицата на ориентација во наведениот редослед.	Т	П
2.32.	При претставувањето трансляторно движење во цилиндричен координатен систем не се менува ориентацијата на подвижниот координатен систем придружен со телото што се движи.	Т	П
2.33.	Промената на ориентацијата на подвижен координатен систем преку соодветни RPY движења (агли), кој пред движењето не бил паралелен со референтниот координатен систем е претставена со соодветната RPY матрица.	Т	П
2.34.	RPY ротациите се во однос на координатните оски од подвижниот координатен систем.	Т	П
2.35.	RPY движења се: ротација околу локалната z-оска, ротација околу локалната y-оска, ротација околу локалната x-оска.	Т	П

ПРАШАЊА И ОДГОВОРИ

2.36.	Решавањето на инверзната кинематска задача во RPY координатниот систем е посложено отколку во случајот на сферен координатен систем.	Т	П
2.37.	Движењето на антропоморфен робот се претставува со D-H модел.	Т	П
2.38.	Во инверзните кинематски равенки непознати се променливите на роботот, додека крајната позиција и ориентација на роботот е позната.	Т	П
2.39.	D-H моделот на еден робот не е применлив во случаите кога постои движење околу u -оската.	Т	П
2.40.	D-H моделот на еден робот е применлив за секоја роботска конфигурација односно за секоја можна комбинација зглобови и врски помеѓу нив, без оглед на нејзината сложеност.	Т	П
2.41.	Моделирањето на роботите со D-H моделот е побрзо и подиректно отколку со останатите техники.	Т	П
2.42.	Елементите на Јакобијанот на една роботска рака не зависат од времето.	Т	П
2.43.	Јакобијанот за една роботска рака се добива со диференцирање на равенките на положба на раката во однос на променливите на зглобовите од раката.	Т	П
2.44.	Јакобијанот на една роботска рака е $b \times n$ матрица, каде n е бројот краци.	Т	П
2.45.	Движењата на координатниот систем придружен кон роботската рака зависат од диференцијалните движења на зглобовите на роботот.	Т	П
2.46.	За пресметување на Јакобијанот на една роботска рака потребни се само третата и четвртата колона од соодветните трансформациони матрици 0T_i .	Т	П
2.47.	Диференцијалниот оператор претставува трансформациона матрица.	Т	П
2.48.	Кај диференцијалните ротации е битен редоследот на множење на матриците на диференцијални ротации.	Т	П
2.49.	Без оглед на нивната конфигурација, две роботски раце ќе остварат иста брзина на движење со исти брзини во зглобовите.	Т	П
2.50.	Сингуларитетите на една роботска рака се такви конфигурации, во кои роботската рака губи еден или повеќе степени слобода на движење.	Т	П
2.51.	Динамичките равенки на еден робот практично се нерешливи, освен во наједноставните случаи	Т	П
2.52.	За одредување на движењето на еден робот по правило секогаш се користи Њутоновата механика	Т	П
2.53.	Во едноставните примери, примената на Лагранжовата механика во споредба со Њутоновата може да се покаже понеповолна од аспект на времетраењето и обемот на потребните претресметки.	Т	П
2.54.	Инерционата матрица е основна матрица на роботската динамика, исто како што јакобиевата матрица е основната матрица на роботската кинематика.	Т	П

ПРАШАЊА И ОДГОВОРИ

2.55.	Гравитационата матрица не се јавува во бестежинска состојба.	Т	П
2.56.	Секоја ориентација остварена преку три последователни елементарни ротации околу оските на референтниот координатен систем е идентична со ориентацијата постигната со истите елементарни ротации околу оските на подвижниот координатен систем само во обратен редослед.	Т	П
2.57.	Не секогаш може да се определи инверзна матрица кон инерционата матрица.	Т	П
2.58.	Редоследот на транслацијата и ориентацијата на една роботска рака, кои заедно ја дефинираат положбата на раката во просторот, не е битен, затоа што транслациите никогаш не ја менуваат ориентацијата, ниту пак промената на ориентацијата влијае врз позицијата на раката.	Т	П
2.59.	Постои антропоморфна аналогија на призматичен зглоб.	Т	П
2.60.	Оските на зглобовите на една сферна роботска рака се сечат во една точка.	Т	П
2.61.	Краците претставуваат фиксна врска помеѓу зглобовите, иако не мора нужно да бидат крути (можат да бидат и еластични).	Т	П
2.62.	Задачата што треба да ја изврши една роботска рака (соодветното движење) по правило се задава во просторот на зглобовите на раката.	Т	П
2.63.	Цилиндричниот и сферниот зглоб имаат по 3 степени слобода на движење.	Т	П
2.64.	Векторот $\mathbf{v} = [0 \ 1 \ 1]^T$ ротира околу y -оската на р.к.с.* за 90° . Неговите нови координати се $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$.	Т	П
2.65.	Бројот степени слобода на движење на роботската рака одговара на бројот променливи неопходни да се опише нејзината конфигурација.	Т	П
2.66.	Движењето на роботската рака настанува и во зглобовите и во краците.	Т	П

2. КИНЕМАТИКА НА РОБОТСКА РАКА

Положбата на една точка P во просторот се претставува во однос на одбран референтен координатен систем. Така, нека x , y и z се координатните оски на даден референтен координатен систем, додека O е неговиот координатен почеток. Тогаш референтниот координатен систем може да се означи како $O(x, y, z)$ или, едноставно како $\{O\}$. Нека \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} се ортови на референтниот координатен систем, односно единични вектори на правец на неговите координатни оски. Тогаш, важи: $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ и $\mathbf{k} = (0,0,1)$. За вака дефиниран референтен координатен систем, положбата на една точка P во просторот може да се претстави на следниот начин:

$$P = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} \quad (2.1)$$

каде што p_x, p_y, p_z се координати на точката во одбраниот референтен координатен систем. Положбата на една точка во просторот може да се претстави и со помош на други координатни системи.

Еден вектор \mathbf{p} во просторот може да се претстави преку координатите на неговиот почеток и врв. Така, ако векторот \mathbf{p} започнува во точката $O(o_x, o_y, o_z)$ и завршува во точката $P(p_x, p_y, p_z)$, тој ќе биде претставен на следниот начин:

$$\mathbf{p} = (p_x - o_x) \mathbf{i} + (p_y - o_y) \mathbf{j} + (p_z - o_z) \mathbf{k} \quad (2.2)$$

Ако векторот започнува во координатниот почеток, равенката (2.2) добива облик:

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} \quad (2.3)$$

каде што p_x, p_y, p_z се координати на векторот \mathbf{p} во одбраниот референтен координатен систем. Равенката (2.3) е идентична со равенката (2.1) затоа што секоја точка во просторот може да се претстави со вектор, чиј почеток се наоѓа во координатниот почеток од одбраниот координатен систем.

Трите компоненти на векторот \mathbf{p} можат да се претстават во матричен облик на следниот начин:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

или, во малку модифициран облик:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

кадешто w претставува нормирачки фактор таков што:

$$p_x = \frac{x}{w}, p_y = \frac{y}{w}, p_z = \frac{z}{w} \quad (2.6)$$

Променливата w може да биде произволен број и со неговата измена се менува големината на самиот вектор. Ако w е поголемо од единица, сите координати на векторот се зголемуваат; ако w е помало од единица, координатите на векторот се намалуваат; кога w е еднаков на единица, елементите на векторот остануваат непроменети. Специјален случај е кога w е еднаков на нула. Тогаш елементите на векторот стануваат бесконечно големи и тој станува вектор со бесконечна должина, но со ист правец. Затоа факторот $w = 0$ се користи за претставување **вектор на правец**.

Еден произволен координатен систем \mathbf{F} , чиј координатен почеток се поклопува со координатниот почеток на референтниот координатен систем, може да се претстави со следната матрица:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

каде што:

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad \mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z), \quad \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad (2.8)$$

се единични вектори на правец на оските од набљудуваниот координатен систем \mathbf{F} . Секој од единичните вектори \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} е претставен со своите три координати во избраниот референтен координатен систем и тие ја опишуваат положбата на набљудуваниот произволен координатен систем во просторот.

Доколку координатниот почеток на набљудуваниот координатен систем не е сместен во координатниот почеток од референтниот координатен систем, потребно е да се определи и положбата на неговиот координатен почеток во однос на референтниот координатен систем. За таа цел се одредува вектор \mathbf{p} помеѓу координатните почетоци од двата координатни системи:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Тогаш набљудуваниот произволен координатен систем може да се претстави со матрицата:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

каде што првите три колони се вектори на правец со $w = 0$, кои го претставуваат правецот на единичните вектори \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} од произволниот координатен систем \mathbf{F} , додека четвртата колона е вектор со $w = 1$, кој ја

претставува положбата на координатниот почеток од произволниот координатен систем во однос на референтниот координатен систем.

Произволен објект во просторот може да се претстави на тој начин што ќе му се придружи координатен систем и потоа тој координатен систем ќе се претстави во просторот. Позицијата и ориентацијата на објектот во однос на придружениот координатен систем се секогаш познати. Оттаму, сè додека координатниот систем придружен со објектот може да се претстави во просторот, ќе биде позната и позицијата и ориентацијата на објектот во однос на референтниот координатен систем.

Една точка во просторот има само три степени слобода на движење – таа може да се движи само долж x -оската, y -оската и z -оската од референтниот координатен систем. Едно цврсто тело во просторот има 6 степени слобода на движење - тоа не само што може да се движи долж координатните оски од референтниот координатен систем, туку може и да ротира околу нив. Следствено, едно цврсто тело да биде целосно опишано во просторот, потребни се 6 информации. Матрицата (2.10) содржи 12 информации – 9 за ориентација и 3 за позиција, што значи дека постојат дополнителни ограничувања меѓу нив, кои произлегуваат од познатите карактеристики на координатниот систем придружен со цврстото тело: трите единични вектори \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} се заемно нормални и должината на единичниот вектор е еднаква на единица, што резултира во следните равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{o} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} &= 0 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{o} &= 0 \\ |\mathbf{n}| &= 1 \\ |\mathbf{a}| &= 1 \\ |\mathbf{o}| &= 1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Математичката операција множење матрици бара матриците множители да бидат димензионо соодветни, што значи дека бројот колони од првата матрица множител мора да одговара на бројот редици од втората матрица множител. Затоа, при составувањето на матриците \mathbf{F} за позицијата и ориентацијата на едно цврсто тело во просторот, се внимава тие да бидат квадратни со димензии (3×3) или (4×4) , соодветно. Ако матрицата \mathbf{F} ја претставува и позицијата и ориентацијата на цврстото тело во просторот, тогаш во последната редица од матрицата се внесува соодветниот нормирачки фактор w , за димензијата на матрицата да биде (4×4) . Доколку матрицата \mathbf{F} ја претставува само ориентацијата на цврстото тело во просторот, или се испушта нормирачкиот фактор w , за димензијата на матрицата да биде (3×3) , или се додава четврта колона со првите три нулеви елементи за димензијата на матрицата да биде (4×4) . Ваквите матрици се нарекуваат **хомогени матрици** и нивниот општ облик е:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Трансформацијата се дефинира како движење во просторот. Движењето на еден подвижен координатен систем во просторот во однос на одбран референтен координатен систем може да се претстави на сличен начин како што се претставува и самиот координатен систем во просторот. Ова произлегува од фактот дека движењето односно трансформацијата сама по себе претставува промена на состојбата на координатниот систем изразена преку промена на неговата позиција и ориентација, па, следствено, може да биде прикажана исто како еден координатен систем.

Трансформацијата може да биде:

- чиста транслација
- чиста ротација
- комбинација од транслација и ротација

Секое од овие движења (трансформации) се претставува на соодветен начин.

Трансформацијата се нарекува **чиста транслација** доколку координатниот систем, кој може да претставува произволно цврсто тело, се движи во просторот без да ја менува својата ориентација. Во тој случај единичните вектори на ориентација го задржуваат својот правец и не се менуваат. Се менува само положбата на координатниот почеток од набљудуваниот подвижен координатен систем во однос на референтниот координатен систем. Новата положба на подвижниот координатен систем во однос на референтниот може да се определи како збир од векторот кој го претставува движењето $\mathbf{d}(d_x, d_y, d_z)$ и векторот на почетната положба \mathbf{p} . Во матричен облик, чистата транслација е претставена со матрицата на трансформација **Trans**, која го има следниот едноставен облик:

$$\mathbf{Trans} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

каде што d_x, d_y, d_z се трите компоненти од векторот на транслација \mathbf{d} во однос на референтниот координатен систем.

Чистата ротација околу координатните оски на референтниот координатен систем е опишана со трансформационите матрици:

$$\mathbf{R}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} - \text{матрица на ротација околу } x\text{-оската} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ - матрица на ротација околу } y \text{-оската} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{R}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ - матрица на ротација околу } z \text{-оската} \quad (2.16)$$

Колоната $[1 \ 0 \ 0]^T$ во матрицата на ротација околу x -оската означува дека x -координатите не се менуваат. Аналогно, колоната $[0 \ 1 \ 0]^T$ во матрицата на ротација околу y -оската и колоната $[0 \ 0 \ 1]^T$ во матрицата на ротација околу z -оската означува дека y -координатите односно z -координатите не се менуваат.

Правецот на произволната оска \mathbf{k} е претставен со единичниот вектор на правец $\mathbf{l} = [l_x \ l_y \ l_z]^T$. Ротацијата околу оваа оска за агол θ се остварува со следните последователни дејствија:

1. Единичниот вектор \mathbf{l} се подредува со z -оската преку ротација околу z -оската за агол α и ротација околу y -оската за агол β
2. Потоа се ротира околу z -оската за агол θ
3. На крај единичниот вектор \mathbf{l} се подредува со неговиот првобитен правец преку одротирање околу y -оската и одротирање околу z -оската

и таа е опишана со трансформационата матрица:

$$\mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta) = \begin{bmatrix} l_x^2(1-C\theta)+C\theta & l_x l_y(1-C\theta)-l_z S\theta & l_x l_z(1-C\theta)+l_y S\theta \\ l_x l_y(1-C\theta)+l_z S\theta & l_y^2(1-C\theta)+C\theta & l_y l_z(1-C\theta)-l_x S\theta \\ l_x l_z(1-C\theta)-l_y S\theta & l_x l_z(1-C\theta)+l_x S\theta & l_z^2(1-C\theta)+C\theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

кадешто $S\theta = \sin \theta$ и $C\theta = \cos \theta$. Ако е дадена ротационата матрица \mathbf{R} , векторот \mathbf{l} и аголот θ можат да се пресметаат на следниот начин:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{\text{Trag}\mathbf{R} - 1}{2}\right) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

со ограничување:

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1 \quad (2.21)$$

Тоа значи дека дадена ротација \mathbf{R} може да се оствари со ротација за агол θ околу оската \mathbf{k} определени со (2.19) и (2.20).

Комбинираното движење на еден произволен координатен систем се состои од одреден број последователни транскации и ротации, било околу координатните оски од усвоениот референтен координатен систем, било околу сопствените оски. Редоследот на овие елементарни движења е многу битен, зошто со промената на редоследот на две последователни трансформации се менува и крајниот резултат (резултантната трансформација).

Движењето на еден координатен систем во просторот се опишува преку движењето на точката P придружена кон него. Кога набљудуваниот координатен систем ротира или се придвижува транслаторно во однос на референтниот координатен систем, заедно со него се придвижува и точката P , при што нејзините координати во однос на подвижниот координатен систем остануваат непроменети, а се менуваат само нејзините координати во однос на референтниот координатен систем. Ако извршените елементарни трансформации се во однос на координатните оски од референтниот координатен систем, при одредувањето на новата положба на точката P соодветните трансформациони матрици множат од лево; доколку елементарните трансформации се во однос на подвижниот координатен систем, трансформационите матрици множат оддесно.

Многу често, наместо конвенционалните ознаки за соодветните трансформации, се користат следните: ${}^{\mathbf{U}}\mathbf{T}_{\mathbf{R}}$ - што значи трансформација на координатниот систем \mathbf{R} во однос на координатниот систем \mathbf{U} . Аналогно, координатите на една точка се означуваат со ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{P}$ или ${}^{\mathbf{U}}\mathbf{P}$, што значи координати на точката P во однос на координатниот систем \mathbf{R} односно координатниот систем \mathbf{U} , соодветно. Овие ознаки алтернативно ќе се користат во продолжение.

Во роботиката многу често се појавува потреба од одредување инверзни матрици кон трансформационите матрици. Имајќи на ум дека детерминантите на ротационите матрици се еднакви на единица, а адјунгованите матрици кон транспонираниот ротациони матрици се еднакви на самите транспонирани матрици, за инверзните матрици кон ротационите матрици се добива:

$$\mathbf{R}(x, \theta)^{-1} = \frac{\text{Adj}[\mathbf{R}(x, \theta)^T]}{\det[\mathbf{R}(x, \theta)]} = \frac{\mathbf{R}(x, \theta)^T}{1} = \mathbf{R}(x, \theta)^T \quad (2.22)$$

$$\mathbf{R}(y, \theta)^{-1} = \frac{\text{Adj}[\mathbf{R}(y, \theta)^T]}{\det[\mathbf{R}(y, \theta)]} = \frac{\mathbf{R}(y, \theta)^T}{1} = \mathbf{R}(y, \theta)^T \quad (2.23)$$

$$\mathbf{R}(z, \theta)^{-1} = \frac{\text{Adj}[\mathbf{R}(z, \theta)^T]}{\det[\mathbf{R}(z, \theta)]} = \frac{\mathbf{R}(z, \theta)^T}{1} = \mathbf{R}(z, \theta)^T \quad (2.24)$$

Треба да се забележи дека ова важи само за едноставните (3×3) -димензиони ротациони матрици. Во случајот на хомогените (4×4) -димензиони

трансформациони матрици, за да се определат соодветните инверзни матрици, хомогената матрица се дели на два дела: првите три редици и колони го чинат тн. ротационен дел, а првите три елементи од последната колона го чинат тн. позиционен дел. Тогаш, инверзната матрица кон дадената хомогена трансформациона матрица се одредува така што ротациониот дел се заменува со неговиот соодветен транспониран пар, позициониот дел се заменува со скаларните производи на векторот \mathbf{P} со елементарните вектори \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} , а последната редица со нормирачките фактори не се менува:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{P} \cdot \mathbf{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

каде што:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} &= p_x \cdot n_x + p_y \cdot n_y + p_z \cdot n_z \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{o} &= p_x \cdot o_x + p_y \cdot o_y + p_z \cdot o_z \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} &= p_x \cdot a_x + p_y \cdot a_y + p_z \cdot a_z \end{aligned} \quad (2.26)$$

Конфигурацијата на една роботска рака по правило соодветствува на координатниот систем во кој е дефинирана. Така, роботската рака дефинирана во правоаголен координатен систем ќе се состои од три транслаторни зглоба (3P), додека роботска рака дефинирана во цилиндричен координатен систем ќе се состои од два транслаторни и еден ротационен зглоб (R2P). Аналогно, роботска рака со сферни координати (дефинирана во сферен координатен систем) ќе се состои од еден линеарен и два ротациони зглоба (2RP) и, конечно, еден антропоморфен робот ќе има три ротациони зглоба (3R).

Одредувањето на позицијата и ориентацијата на раката од роботот во просторот се нарекува **директна кинематика** на роботската рака. Ако се познати сите променливи на зглобовите од роботската рака, со помош на директната кинематика може да се определи положбата на роботот во просторот во произволен временски миг. Обратната задача, која се состои во одредување на потребното движење на роботската рака за таа да се најде во саканата позиција и ориентација, се нарекува **инверзна кинематика** на роботската рака. Со други зборови, ако роботската рака треба да се најде во одредена позиција и со одредена ориентација во просторот, потребно е да се определи колку треба да изнесуваат должините на краците и аглите на зглобовите од роботот. При директната кинематика на роботската рака, во соодветните кинематски равенки се внесуваат конкретните вредности за познатите променливи на роботот, додека при инверзната кинематика се одредуваат инверзните равенки кон споменатите кинематски равенки. Во пракса многу поважна е инверзната кинематика, бидејќи му овозможува на роботот да извршува работи.

Соодветните равенки кои ја дефинираат позицијата и ориентацијата на една роботска рака во просторот се наречени **директни кинематски равенки** и

нивниот изглед зависи од конфигурацијата на роботот. Роботска рака дефинирана со правоаголни координати остварува произволна положба во просторот преку линеарни движења во однос на x, y и z -оската од референтниот координатен систем. Бидејќи во случајот нема никаква ротација, трансформационата матрица што го претставува ова движење е едноставна матрица на транслација:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{T}_P} = \mathbf{T}_{pr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

при што $\mathbf{R}_{\mathbf{T}_P}$ ја означува матрицата на трансформација помеѓу референтниот координатен систем \mathbf{R} и координатниот почеток P на координатниот систем придружен со роботската рака (односно положбата на точката P во однос на референтниот координатен систем \mathbf{R}), а \mathbf{T}_{pr} означува дека набљудуваната трансформација (движење) е прикажано со правоаголни координати.

Роботска рака дефинирана со цилиндрични координати остварува произволна позиција во просторот преку две линеарни движења и едно ротационо. Тоа се следните последователни движења: транслација за r единици долж x -оската, ротација за агол α околу z -оската и транслација за l единици долж z -оската и вкупната трансформација е претставена со матрицата:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{T}_P} = \mathbf{T}_{cyl}(r, \alpha, l) = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Првите три колони во (2.28) ја претставуваат ориентацијата на роботската рака (односно координатниот систем придружен со неа) во просторот, а последната колона ја претставува положбата на координатниот почеток од координатниот систем придружен со роботската рака (следствено и позицијата на самата роботска рака во просторот). Очигледно, ориентацијата на координатниот систем придружен со роботската рака се менува како резултат од ротацијата околу z -оската.

Координатниот систем придружен со цилиндричната роботска рака може повторно да се врати во првобитната ориентација паралелно со референтниот координатен систем (да се „одротира“), ако се ротира околу a -оската за агол $-\alpha$. Соодветната матрица на трансформација која го прикажува ова движење се определува на следниот начин:

$$\mathbf{T}_{cyl} \times \mathbf{R}(a, -\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Како што се гледа од (2.29), положбата на координатниот почеток од координатниот систем на роботската рака е непроменета, што е постигнато со ротација на подвижниот координатен систем околу локалната a –оска.

Роботска рака дефинирана во сферен координатен систем остварува произволна позиција во просторот преку две ротациони движења и едно линеарно. Тоа се следните последователни движења: транслација за r единици долж z -оската, ротација за агол β околу y -оската и ротација за агол γ околу z -оската. Матрицата на трансформација која ја дефинира положбата на координатниот почеток P од координатниот систем придружен со роботската рака во однос на референтниот координатен систем претставува производ од матриците на одделните движења во обратен редослед:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathbf{T}_P &= \mathbf{T}_{sph}(r, \beta, \gamma) = \mathbf{Rot}(z, \gamma) \times \mathbf{Rot}(y, \beta) \times \mathbf{Trans}(0, 0, r) = \\ &= \begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & S\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C\beta \cdot S\gamma & C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Првите три колони во (2.30) ја претставуваат ориентацијата на роботската рака (односно координатниот систем придружен со неа) во просторот, а последната колона ја претставува положбата на координатниот почеток од координатниот систем придружен со роботската рака (следствено и позицијата на самата роботска рака во просторот). Очигледно, ориентацијата на координатниот систем придружен со роботската рака се менува како резултат од ротацијата околу y –оската и z –оската.

Координатниот систем придружен со сферната роботска рака може повторно да се врати во првобитната ориентација паралелно со референтниот координатен систем (да се „одротира“), што е прикажано со матрицата на трансформација:

$$\mathbf{T}_{sph} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rS\beta \cdot C\gamma \\ 0 & 1 & 0 & rS\beta \cdot S\gamma \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Тоа се постигнува така што подвижниот координатен систем ќе се заврти за агол $-\beta$ околу локалната o –оска и за агол $-\gamma$ околу локалната a –оска, во наведениот редослед.

Роботска рака дефинирана во антропоморфни координати се одликува со три ротациони движења, а соодветната матрица на трансформација може да се изведе со помош на D-H моделот на оваа рака.

Едно круто тело има најмногу 3 степени слобода на ротационо движење, па, оттука, за да се дефинира неговата ориентација во просторот доволни се 3 величини. Меѓутоа, ротационите матрици \mathbf{R} со кои се претставува ориентацијата на една роботска рака во просторот имаат 9 елементи:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Ова не претставува никаква противречност со претходното тврдење, затоа што нивните елементи не се независни величини, туку се ограничени со фактот дека колоните на овие ротациони матрици се единични и взаемно нормални вектори. Тие ограничувања водат кон шест независни равенки:

$$\sum_{i=1}^3 R_{ij}^2 = 1; j = 1, 2, 3 \quad (2.33)$$

$$R_{1i}R_{1j} + R_{2i}R_{2j} + R_{3i}R_{3j} = 0; i \neq j \quad (2.34)$$

што значи дека постојат 3 слободни променливи. Ротационите матрици од типот на $\mathbf{R}(x, \alpha)$, $\mathbf{R}(y, \beta)$ итн., претставуваат неминимален опис на ориентацијата на едно цврсто тело.

Ојлеровите агли, аглите на валање, подигање и скршнување, единичните кватерниони, претставуваат минимален опис на ориентацијата на една роботска рака, бидејќи моделот користи само три агли, кои опишуваат низа од три последователни ротации. Ојлеровите агли се најчесто користени ротациони координати.

Ојлеровите агли претставуваат три елементарни и последователни ротации во одреден редослед, со помош на кои може да се претстави просторната ориентација на кој и да било координатен систем во однос на даден референтен координатен систем. Овие елементарни ротации можат да бидат било во однос на оските на неподвижниот референтен координатен систем, било во однос на оските на самиот подвижен координатен систем, чија ориентација се одредува. Тоа се должи на фактот дека секоја ориентација остварена преку три последователни елементарни ротации околу оските на референтниот координатен систем е идентична со ориентацијата постигната со истите елементарни ротации околу оските на подвижниот координатен систем само во обратен редослед. Вообичаено, Ојлеровите агли се означуваат со ϕ , θ и ψ .

Општо земено, постојат голем број тројки агли кои опишуваат иста ориентација, што значи дека различни комбинации од ротации околу координатните оски на одбраниот координатен систем водат кон различни тројки Ојлерови агли. Такви се, на пример, ZXZ, ZYZ, XYZ Ојлеровите агли итн. Постојат вкупно 12 можни комбинации од по 3 елементарни ротации претставени со Ојлеровите агли, со помош на кои може да се постигне произволна ориентација во просторот:

- ZXZ, XYX, YZY, ZYZ, XZX, YXY
- XYZ, YZX, ZXY, XZY, ZYX, YXZ

При изборот на Ојлеровите агли, треба да се внимава две последователни ротации да не бидат околу иста оска, на пр. ZZX, ZZY итн. затоа што тогаш се губи степен слобода на движење. Така, од вкупниот број можни комбинации на последователни ротации околу координатните оски, само 12 се применливи за

претставување на произволна ориентација во просторот, па, следствено, постојат 12 тројки Ојлерови агли. Исто така, при дефинирањето на Ојлеровите агли треба да се ограничи нивниот опсег, за да се избегне различни тројки агли да претставуваат иста ориентација. На пример, во случајот на ZYZ Ојлеровите агли, првата ротација околу подвижната z -оска треба да биде во опсег $(-\pi, \pi)$, следната ротација околу подвижната y -оска треба да биде ограничена на опсег $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и последната ротација околу подвижната z -оска треба да биде во опсег $(-\pi, \pi)$. Најчесто користени се ZXZ и XYZ Ојлеровите агли.

Ориентацијата на една роботска рака со помош на ZYZ Ојлерови агли може да се претстави со следните три последователни ротации околу оските на подвижниот координатен систем (n, o, a) придружен кон неа, во наведениот редослед:

- ротација за агол ϕ околу a -оската
- ротација за агол θ околу o -оската
- ротација за агол ψ околу a -оската

Притоа, под претпоставка, подвижниот координатен систем придружен кон роботската рака бил паралелен со референтниот координатен систем пред споменатите ротации. Резултантната ротациона трансформација претставува производ од елементарните и, бидејќи елементарните ротации се околу z -оската, y -оската и повторно z -оската на подвижниот координатен систем, оваа матрица се означува како \mathbf{R}_{ZYZ} матрица:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ZYZ}(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}(a, \phi) \times \mathbf{R}(o, \theta) \times \mathbf{R}(a, \psi) \Rightarrow \\ &= \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\phi \cdot S\psi & -C\phi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\phi \cdot C\psi & C\phi \cdot S\theta & 0 \\ S\phi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\phi \cdot S\psi & -S\phi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\phi \cdot C\psi & S\phi \cdot C\theta & 0 \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Решението на инверзната кинематска задача се добива откако најнапред матричната равенка (2.35) се помножи од лево со матрицата $\mathbf{R}(a, \phi)^{-1}$. На овој начин се елиминира непознатата ϕ на десната страна и се добива:

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{cases} \arctg \frac{S\phi}{C\phi} = \arctg \frac{a_y}{a_x} \\ \arctg \frac{S(-\phi)}{C(-\phi)} = \arctg \frac{(-a_y)}{(-a_x)} \end{cases} \\ \psi &= \arctg \frac{S\psi}{C\psi} = \arctg \frac{-n_x S\phi + n_y C\phi}{-o_x S\phi + o_y C\phi} \\ \theta &= \arctg \frac{S\theta}{C\theta} = \arctg \left(\frac{a_x C\phi + a_y S\phi}{a_z} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Битно е да се уочи дека кај секој од моделите со Ојлерови агли постои суштински проблем познат како проблем на сингуларитет на координатите, кој не се јавува кај неминималниот опис со ротациони матрици. Во конкретниот пример сингуларитет постои за $\theta = 0$, бидејќи за оваа вредност на аголот θ доаѓа до поклопување на првата и последната оска на ротација на роботската рака и се губи еден степен слобода на движење. Од математичка гледна точка, за многу мали вредности на θ равенствата за ϕ и ψ стануваат недефинирани, а од физичка гледна точка многу мали ротации околу n -оската бараат невозможно големи ротации околу a -оската. Појавата на сингуларитети е присутна кај сите минимални модели на ориентацијата на една роботска рака.

На крајот треба да се истакне дека матрицата $\mathbf{R}_{\text{Euler}}(\phi, \theta, \psi)$ ја претставува промената на ориентацијата на една роботска рака изразена преку Ојлеровите агли само доколку подвижниот координатен систем придружен со раката првобитно бил паралелен со референтниот координатен систем. Ако пред почетокот на ротациите подвижниот координатен систем на роботската рака, чија ориентација во просторот се одредува, не се поклопува со референтниот координатен систем, крајната ориентација на роботската рака во просторот се одредува како производ на матрицата од претходната ротација и $\mathbf{R}_{\text{Euler}}(\phi, \theta, \psi)$ матрицата на тековните ротации. Притоа, множењето со $\mathbf{R}_{\text{Euler}}(\phi, \theta, \psi)$ матрицата се врши оддесно, ако конкретните ротации се извршуваат околу оските на подвижниот координатен систем, со цел да не се промени позицијата на набљудуваната роботска рака. Исто така, матрицата $\mathbf{R}_{\text{Euler}}(\phi, \theta, \psi)$ ја претставува само промената на ориентацијата на набљудуваната роботска рака, додека нејзината комплетна положба - позицијата и конечната ориентација во однос на референтниот координатен систем, се добива како производ од матрицата на позиција во соодветните координати и матрицата на ориентација $\mathbf{R}_{\text{Euler}}(\phi, \theta, \psi)$.

Една роботска рака може да ја оствари саканата ориентација во просторот и со следните три последователни ротации околу оските на подвижниот координатен систем придружен кон неа (n, o, a) , во дадениот редослед:

- ротација за агол ϕ околу a -оската наречен **агол на валање** (Roll)
- ротација за агол θ околу o -оската наречен **агол на подигање** (Pitch)
- ротација за агол ψ околу n -оската наречен **агол на скршнување** (Yaw)

При тоа, претпоставка е дека подвижниот координатен систем на роботската рака бил паралелен со референтниот координатен систем пред споменатите ротации. Во спротивно, конечната ориентација на роботската рака се добива кога матрицата на претходната ориентација се помножи оддесно со матрицата од тековната ориентација. Битно е да се забележи дека саканата ориентација на роботската рака се постига со последователни ротации околу оските од подвижниот, а не референтниот координатен систем, бидејќи само во тој случај позицијата на роботската рака ќе остане непроменета. Следствено, при одредувањето на ориентацијата на роботската рака во просторот сите ротациони матрици се множат оддесно. Аглите ϕ , θ и ψ го добиле своето име од науката за движењето и управувањето на летала.

Матрицата која ја претставува ориентацијата на една роботска рака со помош на RPY аглите е:

$$\mathbf{R}_{\text{RPY}}(\varphi, \vartheta, \eta) = \mathbf{R}(a, \varphi) \times \mathbf{R}(o, \vartheta) \times \mathbf{R}(n, \eta) =$$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\vartheta & C\varphi \cdot S\vartheta \cdot S\eta - S\varphi \cdot C\eta & C\varphi \cdot S\vartheta \cdot C\eta + S\varphi \cdot S\eta & 0 \\ S\varphi \cdot C\vartheta & S\varphi \cdot S\vartheta \cdot S\eta + C\varphi \cdot C\eta & S\varphi \cdot S\vartheta \cdot C\eta - C\varphi \cdot S\eta & 0 \\ -S\vartheta & C\vartheta \cdot S\eta & C\vartheta \cdot C\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

и таа ја претставува само промената на ориентацијата на раката. Резултантното движење на роботската рака составено од промената на нејзината позиција и ориентација е дадено со производот од соодветната матрица на позиција и RPY матрицата. Така, вкупното движење на една сферна роботска рака ќе биде:

$$\mathbf{R}_{\text{TH}} = \mathbf{T}_{\text{sph}}(r, \beta, \gamma) \times \mathbf{R}_{\text{RPY}}(\varphi, \vartheta, \eta) \quad (2.38)$$

За позната матрица $\mathbf{R}_{\text{RPY}}(\varphi, \vartheta, \eta)$, решението на инверзната кинематска задача е:

$$\varphi = \arctg \frac{S\varphi}{C\varphi} \quad \text{и} \quad \varphi = \arctg \frac{S(-\varphi)}{C(-\varphi)}$$

$$\vartheta = \arctg \frac{S\vartheta}{C\vartheta} = \arctg \frac{-n_z}{n_x C\varphi + n_y S\varphi}$$

$$\eta = \arctg \frac{S\eta}{C\eta} = \arctg \frac{a_x S\varphi - a_y C\varphi}{-o_x S\varphi + o_y C\varphi} \quad (2.39)$$

Единичните кватерниони, кои уште се нарекуваат **версори**, претставуваат многу практичен начин за опишување на ротацијата и ориентацијата на едно круто тело во просторот. Во споредба со Ојлеровите агли, тие се добиваат многу поедноставно и кај нив не се јавува проблемот со сингуларитети како кај Ојлеровите агли. Кога се користат за претставување на ротација, често се нарекуваат и **ротациони кватерниони**, а кога се користат за претставување на ориентација, се нарекуваат и **ориентациони кватерниони**.

Ориентацијата на еден антропоморфен робот може да се определи врз основа на неговиот Денавит-Хартенбергов модел.

Овде не се прикажани сите можни комбинации на координати за позиција и ориентација и, следствено, не се изведени соодветните равенки на директната и инверзната кинематика, заради нивната сложеност. Секогаш кога станува збор за сложени конфигурации, препорачливо е да се користи Денавит-Хартенберговиот модел на една роботска рака.

Постапката на Denavit и Hartenberg е многу едноставен начин за моделирање на зглобовите и краците на еден робот и може да се примени за каква и да било роботска конфигурација, без оглед на нејзината сложеност. Исто така Denavit - Hartenberg моделот може да се користи за претставување движење во кои и да било координати: правоаголни, цилиндрични, сферни, Ојлерови, RPY, како и за моделирање антропоморфни роботи, SCARA роботи и секоја можна

комбинација зглобови и краци. Иако претходно изложените постапки за моделирање работи се побрзи и подиректни, Denavit - Hartenberg моделот ја има дополнителната предност што го користат многу постапки за анализа на динамиката на еден робот.

За да се моделира движењето на зглобовите од една роботска рака според Denavit - Hartenberg конвенцијата, кон секој зглоб од раката се придружува соодветен координатен систем. Поконкретно, се придружува z – оската и x – оската, а y – оската нема потреба посебно да се одредува, затоа што таа секогаш е нормална на останатите две оски. Покрај тоа Denavit - Hartenberg моделот никогаш не ја користи y – оската.

Придружувањето на локален координатен систем кон зглобовите од ракат се врши на следниот начин:

- Сите зглобови, без исклучок, се претставени со z – оската. Ако зглобот е ротационен, z – оската се поставува во правец на ротацијата според правилото на десната рака, а доколку зглобот е транслаторен, z – оската се поставува во правец на транслаторното движење. Со z_{n-1} е означена z – оската придружена кон n – тиот зглоб, со z_n е означена z – оската придружена кон $(n+1)$ – виот зглоб, а со z_{n+1} е означена z – оската придружена кон $(n+2)$ – риот зглоб. На овој начин се придружуваат z – оските и кон сите останати зглобови во една роботска конфигурација. Доколку зглобот е ротационен, негова променлива ќе биде аголот на завртување θ околу z – оската, а доколку зглобот е транслаторен, негова променлива ќе биде должината на кракот долж z – оската означена со d .
- Во општ случај зглобовите не мора да бидат ниту паралелни, ниту да се сечат. Како последица, нивните z – оски во општ случај се разминувачки прави. Од геометријата е познато дека за две прави што се разминуваат, секогаш постои права што е нормална на нив и го претставува најкусото растојание меѓу двете разминувачки прави. Оваа нормала се нарекува заедничка нормала на разминувачките прави и x – оската на еден зглоб секогаш се поставува во правец на заедничката нормала на неговата z – оска и z – оската на претходниот зглоб. Следствено, ако a_n е заедничката нормала помеѓу z_{n-1} и z_n – оската, правецот на x_n – оската ќе биде долж a_n . На сличен начин, ако a_{n+1} е заедничката нормала помеѓу z_n и z_{n+1} – оската, правецот на x_{n+1} – оската ќе биде долж a_{n+1} . Бидејќи во општ случај заедничките нормали на две соседни z – оски не мора да се сечат или да бидат колинеарни, координатните почетоци на два соседни локални координатни системи исто така се наоѓаат во различни точки.
- Ако две соседни z – оски се паралелни, тие имаат бесконечен број заеднички нормали. Во таков случај се одбира заедничката нормала која е колинеарна со заедничката нормала на претходниот зглоб.
- Доколку две соседни z – оски се сечат, тие немаат заедничка нормала. Тогаш x – оската се поставува во правец на нормалата на рамнината што ја формираат двете z – оски.

Следниот чекор се состои во одредување на потребните движења со кои еден локален координатен систем се трансформира во следниот. Комбинацијата на сите трансформации од основата на роботот до првиот зглоб, од првиот зглоб до вториот итн. ја дава комплетната трансформациона матрица на роботот. Нека, под претпоставка, се набљудува локалниот координатен систем $x_n - z_n$. Тој се трансформира во следниот координатен систем $x_{n+1} - z_{n+1}$ со четири стандардни движења во наведениот редослед:

- Ротација околу z_n – оската за агол θ_{n+1} , сл.2.25а и сл.2.25б. Бидејќи и a_n и a_{n+1} се нормални на z_n , со ротацијата околу z_n за агол θ_{n+1} тие ќе станат паралелни. Следствено, и x_n и x_{n+1} – оските, кои се во правец на овие заеднички нормали, ќе станат паралелни.
- Транслација долж z_n – оската за растојание d_{n+1} , сл.2.25б и сл.2.25в. Бидејќи веќе x_n и x_{n+1} – оските се паралелни помеѓу себе и нормални на z_n – оската, поместувањето долж z_n – оската за растојание d_{n+1} ќе ги направи колинеарни (тие ќе се поклопат помеѓу себе).
- Транслација долж x_n – оската за растојание a_{n+1} , сл.2.25в и сл.2.25г. По ова движење, координатните почетоци на двата соседни локални координатни системи $x_n - z_n$ и $x_{n+1} - z_{n+1}$ ќе се поклопат.
- Ротација на z_n – оската околу x_{n+1} – оската за агол α_{n+1} , сл.2.25д и сл.2.25ѓ. Со ова движење z_n и z_{n+1} – оската се доведуваат до поклопување. Како резултат, координатните системи $x_n - z_n$ и $x_{n+1} - z_{n+1}$ се идентични, што значи дека координатниот систем $x_n - z_n$ е трансформиран во координатниот систем $x_{n+1} - z_{n+1}$.

Со повторување на изложената постапка, се врши трансформација помеѓу секои два соседни координатни системи врзани за зглобовите на една произволна роботска конфигурација. Така, ако се појде од референтниот координатен систем и се одреди трансформацијата до основата на роботот, па трансформацијата до првиот зглоб од роботот итн. се до последниот зглоб и извршниот елемент, ќе се одреди вкупното движење на набљудуваната роботска конфигурација.

Матрицата A со која е опишана трансформацијата од еден во друг соседен локален координатен систем се добива како производ од трансформационите матрици кои ги претставуваат погоре наведените елементарни движења:

- ротација околу z_n - оската за агол θ_{n+1}
- транслација долж z_n - оската за растојание d_{n+1}
- транслација долж x_n - оската за растојание a_{n+1}
- ротација на z_n - оската околу x_{n+1} - оската за агол α_{n+1}

и е дадена со изразот:

$$\begin{aligned}
 {}^n\mathbf{T}_{n+1} &= \mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{Rot}(z, \theta_{n+1})\mathbf{Trans}(0,0,d_{n+1})\mathbf{Trans}(a_{n+1},0,0)\mathbf{Rot}(x, \alpha_{n+1}) = \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_{n+1} & -S\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & S\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & a_{n+1}C\theta_{n+1} \\ S\theta_{n+1} & C\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & -C\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & a_{n+1}S\theta_{n+1} \\ 0 & S\alpha_{n+1} & C\alpha_{n+1} & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Бидејќи сите движења се во однос на локален координатен систем, матриците во (2.40) се множат оддесно. Вкупната трансформација помеѓу основата на роботот и неговиот последен зглоб е претставена со:

$${}^R\mathbf{T}_H = {}^R\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \dots \mathbf{A}_n \quad (2.41)$$

каде што n е редниот број на соодветниот зглоб. За робот со 6 степени слобода на движење, ќе има шест \mathbf{A} матрици.

Решението на инверзната кинемаска задача на роботска рака со 6 степени слобода на движење е:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \begin{cases} \arctg \frac{p_y}{p_x} \\ \arctg \frac{p_y}{p_x} + 180^\circ \end{cases} \\
 \theta_{234} &= \begin{cases} \arctg \frac{a_z}{C_1a_x + S_1a_y} \\ \arctg \frac{a_z}{C_1a_x + S_1a_y} + 180^\circ \end{cases} \\
 \theta_3 &= \arccos \left[\frac{(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4)^2 + (p_z - S_{234} a_4)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \right] \\
 \theta_2 &= \arctg \frac{(C_3 a_3 + a_2)(p_z - S_{234} a_4) - S_3 a_3 (p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4)}{(C_3 a_3 + a_2)(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4) + S_3 a_3 (p_z - S_{234} a_4)} \\
 \theta_4 &= \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3 \\
 \theta_5 &= \arctg \frac{C_{234}(C_1 a_x + S_1 a_y) + S_{234} a_z}{-C_1 a_y + S_1 a_x} \\
 \theta_6 &= \arctg \frac{-S_{234}(C_1 n_x + S_1 n_y) + C_{234} n_z}{-S_{234}(C_1 o_x + S_1 o_y) + C_{234} o_z} \quad (2.42)
 \end{aligned}$$



2.1. Да се претстави во матричен облик векторот:

$$\mathbf{p} = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad (2.43)$$

а) со нормирачки фактор $w = 2$ и б) како единичен вектор на правец.

Решение: а) Соодветната матрица-колона за претставување на векторот (2.43) со нормирачки фактор $w = 2$ е:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

б) Соодветната матрица-колона за претставување на векторот (2.43) како вектор на правец е:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Меѓутоа, за да биде тој единичен вектор на правец, потребно е неговите компоненти да се нормализираат така што должината на векторот ќе биде единица. За таа цел, координатите на векторот се делат со квадратен корен од збирот на квадратите на трите компоненти:

$$\sqrt{8^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{93} \approx 9.65 \quad (2.46)$$

Тогаш:

$$\lambda = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = 1 \quad (2.47)$$

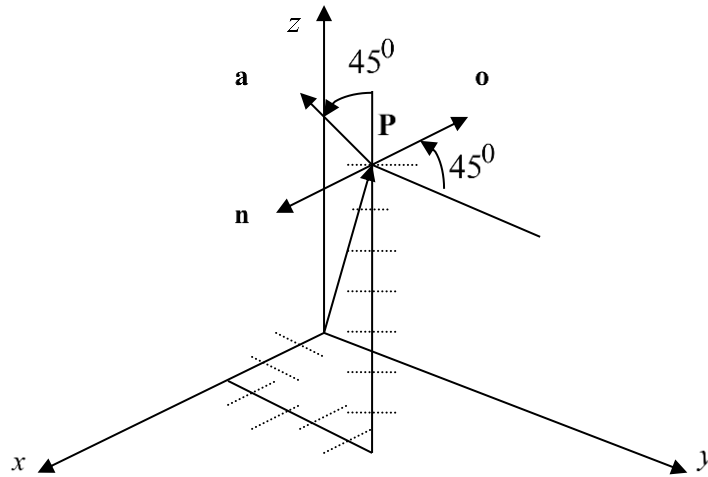
каде што:

$$p_x = \frac{8}{\sqrt{93}} = 0.8296, p_y = \frac{2}{\sqrt{93}} = 0.2074, p_z = \frac{5}{\sqrt{93}} = 0.5185 \quad (2.48)$$

Матрицата-колона за претставување на единичниот вектор на правец е:

$$\mathbf{p}_{edin} = \begin{bmatrix} 0.8296 \\ 0.2074 \\ 0.5185 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

2.2. Да се опише со соодветна трансформациона матрица координатниот систем \mathbf{F} прикажан на Слика 2.1.

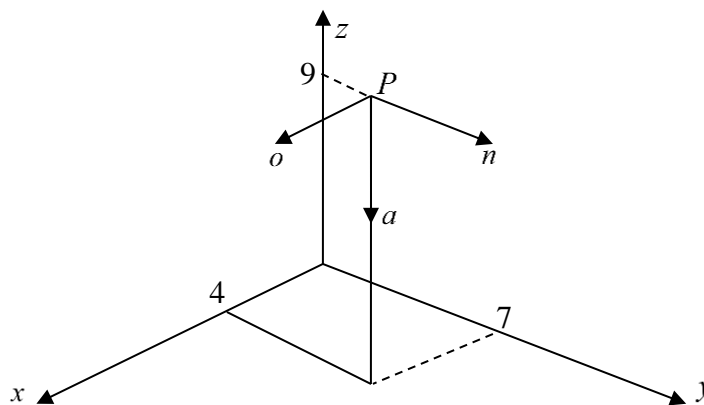


Слика 2.1. Илустрација кон Задача 2.2

Решение: Како што може да се забележи од Слика 2.1, n – оската од координатниот систем F е паралелна со x – оската на референтниот координатен систем, o – оската на координатниот систем F зафаќа агол од 45^0 со y – оската од референтниот координатен систем, а неговата a – оска зафаќа агол од 45^0 со z – оската од референтниот координатен систем, додека неговиот координатен почеток има координати $(3,5,7)$. Следствено, овој координатен систем може да се опише со матрицата:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \cos 45^0 & -\sin 45^0 & 5 \\ 0 & \sin 45^0 & \cos 45^0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0.707 & -0.707 & 5 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

2.3. Да се опише со соодветна хомогена трансформациона матрица положбата на зададениот подвижен координатен систем $F(n, o, a)$ од Слика 2.2 во однос на референтниот координатен систем (x, y, z) , ако $n \parallel y$, $o \parallel x$ и $a \parallel z$.



Слика 2.2. Илустрација кон Задача 2.3

Решение: Како што може да се забележи од Слика 2.2, n -оската од координатниот систем \mathbf{F} е паралелна со y -оската на референтниот координатен систем, o -оската на координатниот систем \mathbf{F} е паралелна со x -оската од референтниот координатен систем, а неговата a -оска е во правец на z -оската од референтниот координатен систем, но во спротивна насока. Координатниот почеток P на подвижниот координатен систем \mathbf{F} има координати $(4,7,9)$. Следствено, овој координатен систем може да се опише со матрицата:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

2.4. Нека, под претпоставка, точката $P(3,5,7)$ е придвижена во просторот за 2 единици долж x -оската, 3 единици долж y -оската и 4 единици долж z -оската од зададен референтен координатен систем. Да се определат новите координати на точката P во просторот.

Решение: Новите координати на точката P во просторот се определуваат во однос на истиот референтен координатен систем (x, y, z) според формулата:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{nova} &= \mathbf{Trans}(2,3,4) \times \mathbf{P}_{stara} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.52)$$

каде што $\mathbf{Trans}(2,3,4)$ е матрицата на извршената translација.

2.5. Подвижниот координатен систем \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

е придвижен за растојание од 5 единици долж x -оската, 2 единици долж y -оската и 6 единици долж z -оската од зададен референтен координатен систем. Да се определи новата положба на набљудуваниот координатен систем во однос на зададениот референтен координатен систем.

Решение: Новата положба на координатниот систем \mathbf{B} во однос на зададениот референтен координатен систем (x, y, z) , по извршеното транслаторно движење опишано со векторот $\mathbf{d} = [5 \ 2 \ 6]^T$, е претставена со производот од трансформационата матрица $\mathbf{Trans}(5,2,6)$ на извршеното транслаторно движење и трансформационата матрица $\mathbf{B}_{stara} = \mathbf{B}$, која ја претставува старата, односно почетната положба на набљудуваниот подвижен координатен

систем во просторот, определени во однос на зададениот референтен координатен систем:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{nova} &= \mathbf{Trans}(5,2,6) \times \mathbf{B}_{stara} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Меѓутоа, ако се има на ум дека транслаторното движење на еден координатен систем во просторот не доведува до промена на неговата ориентација, новата положба \mathbf{B}_{nova} многу полесно се определува од формулата:

$$\mathbf{B}_{nova} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x + d_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y + d_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z + d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

каде што векторот \mathbf{P} ја претставува почетната положба на координатниот почеток P од координатниот систем \mathbf{B} пред движењето:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

а \mathbf{d} е векторот на извршеното транслаторно движење:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Првите три колони од матрицата (2.54) ја претставуваат ориентацијата на координатниот систем \mathbf{B} во просторот и тие, со оглед на тоа дека извршеното движење е чисто транслаторно, остануваат непроменети.

2.6. Нека координатниот систем \mathbf{F} се придвижил во просторот за 5 единици долж x -оската, 2 единици долж y -оската и 6 единици долж z -оската од зададен референтен координатен систем, така што неговата нова положба во просторот во однос на истиот референтен систем е дадена со трансформационата матрица:

$$\mathbf{F}_{nova} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x + d_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y + d_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z + d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Да се определи почетната положба на набљудуваниот подвижен координатен систем \mathbf{F} во однос на зададениот референтен координатен систем.

Решение: Еден начин да се дојде до саканото решение е да се појде од равенката за новата положба на набљудуваниот координатен систем \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}_{nova} = \mathbf{Trans}(5,2,6) \times \mathbf{F}_{stara} \quad (2.59)$$

и таа да се реши во однос на почетната положба:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{stara} &= \mathbf{Trans}^{-1}(5,2,6) \times \mathbf{F}_{nova} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.60) \end{aligned}$$

но овој начин вклучува обемни и често макотрпни пресметки поврзани со одредувањето на инверзната матрица кон трансформационата матрица $\mathbf{Trans}(5,2,6)$. Многу поедноставно е, ако се има на ум дека чистото транслаторно движење не предизвикува промени во ориентацијата на набљудуваниот подвижен координатен систем, координатите на неговата стара положба да се определат според равенките:

$$\begin{aligned} 2 &= p_x + 5 \\ 4 &= p_y + 2 \\ 6 &= p_z + 6 \end{aligned} \quad (2.61)$$

кои се добиени од формулата за новата положба на координатниот почеток P од набљудуваниот подвижен координатен систем \mathbf{F} :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + d_x \\ p_y + d_y \\ p_z + d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + 5 \\ p_y + 2 \\ p_z + 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

2.7. Нека координатниот систем \mathbf{F} се придвижил во просторот за 2 единици долж x -оската, 4 единици долж y -оската и 6 единици долж z -оската од зададен референтен координатен систем, така што неговата нова положба во просторот во однос на истиот референтен систем е дадена со трансформационата матрица:

$$\mathbf{F}_{nova} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Да се определи почетната положба на набљудуваниот подвижен координатен систем \mathbf{F} во однос на зададениот референтен координатен систем.

Решение: Ако се има на ум дека чистото транслаторно движење не предизвикува промени во ориентацијата на набљудуваниот подвижен координатен систем, координатите на неговата стара положба можат да се определат според равенките:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + d_x \\ p_y + d_y \\ p_z + d_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + 2 \\ p_y + 4 \\ p_z + 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Оттука, почетната положба на подвижниот координатен систем \mathbf{F} ќе биде дадена со трансформационата матрица:

$$\mathbf{F}_{почетна} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

2.8. Да се пресметаат вредностите на непознатите елементи од матрицата:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & ? & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & ? & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

така што таа да претставува трансформациона матрица на некој координатен систем.

Решение: Елементите на трансформационата матрица од некој координатен систем мора да ги задоволуваат равенствата:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{o} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{o} = 0$$

$$|\mathbf{n}| = 1$$

$$|\mathbf{a}| = 1$$

$$|\mathbf{o}| = 1$$

(2.67)

кои се сведуваат на:

$$\begin{aligned}
 n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z &= 0 \\
 n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z &= 0 \\
 a_x o_x + a_y o_y + a_z o_z &= 0 \\
 n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1 \\
 o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 &= 1 \\
 a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Во спротивно, координатниот систем нема да биде точно дефиниран. Оттука, имајќи на ум дека:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & ? & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & ? & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

во конкретниот случај се добива:

$$\begin{aligned}
 n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + n_z \cdot a_z = 0 \Rightarrow n_z \cdot a_z = 0 \\
 0 + 1 + n_z^2 &= 1 \Rightarrow n_z = 0 \\
 o_x^2 + 0 + 0 &= 1 \Rightarrow o_x = \pm 1 \\
 0 + 0 + a_z^2 &= 1 \Rightarrow a_z = \pm 1
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

па матрицата (2.66) ќе го има следниот изглед:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

односно:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

2.9. Да се пресметаат вредностите на непознатите елементи од матрицата:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & ? & ? & 0 \\ ? & 0 & -\sqrt{2}/2 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

така што таа ќе претставува трансформациона матрица на некој координатен систем.

Решение: Елементите на трансформационата матрица од некој координатен систем мора да ја задоволуваат векторската равенка:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{o} = \mathbf{a} \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ o_x & o_y & o_z \end{vmatrix} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \Rightarrow$$

$$(n_y o_z - n_z o_y) \mathbf{i} - (n_x o_z - n_z o_x) \mathbf{j} + (n_x o_y - n_y o_x) \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (2.74)$$

од каде што непосредно следуваат условите:

$$n_y o_z - n_z o_y = a_x \quad (2.75)$$

$$-(n_x o_z - n_z o_x) = a_y \quad (2.76)$$

$$n_x o_y - n_y o_x = a_z \quad (2.77)$$

Така, за конкретниот случај од задачата се добива:

$$a_x = n_y o_z - n_z o_y = (0)n_y - (\sqrt{2}/2)(0) = 0 \Rightarrow a_x = 0$$

$$a_y = -(n_x o_z - n_z o_x) = -(0)(0) + (\sqrt{2}/2)o_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow o_x = -1 \quad (2.78)$$

$$a_z = n_x o_y - n_y o_x = (0) \cdot (0) - n_y o_x = \sqrt{2}/2 \Rightarrow n_y(-1) = -\sqrt{2}/2 \Rightarrow n_y = \sqrt{2}/2$$

па матрицата (2.73) ги има следните елементи:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

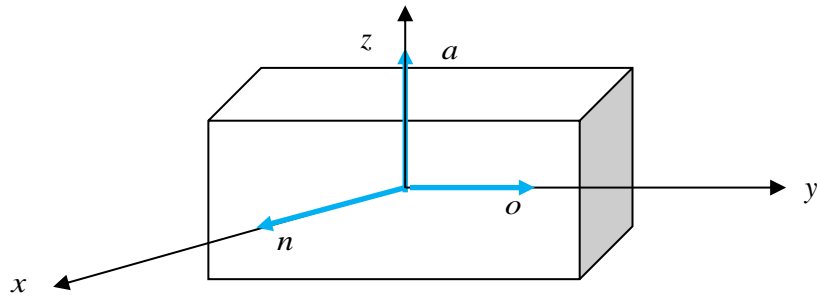
2.10. На Слика 2.3 е прикажано цврсто тело во просторот. Положбата на телото се одредува во однос на даден референтен координатен систем (x, y, z) , додека со телото е придружен подвижен координатен систем (n, o, a) . Да се претстави графички движењето на телото, ако тоа ги извршува следните елементарни трансформации:

- ротација за агол од 90^0 околу x – оската
- ротација за агол од 90^0 околу z – оската

и:

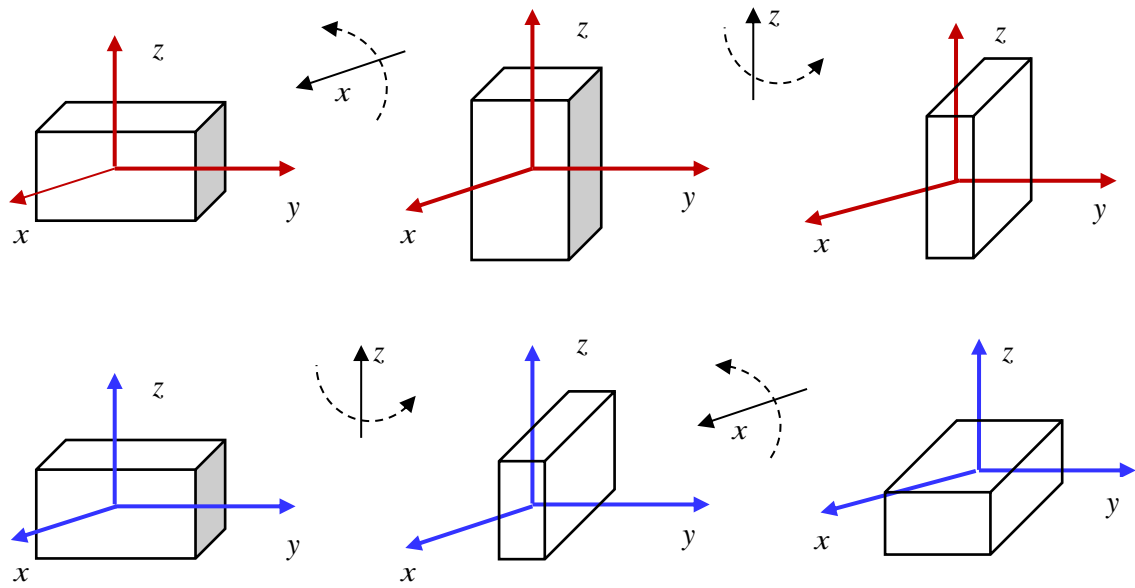
- ротација за агол од 90^0 околу n – оската
- ротација за агол од 90^0 околу a – оската

во наведениот и во обратен редослед.

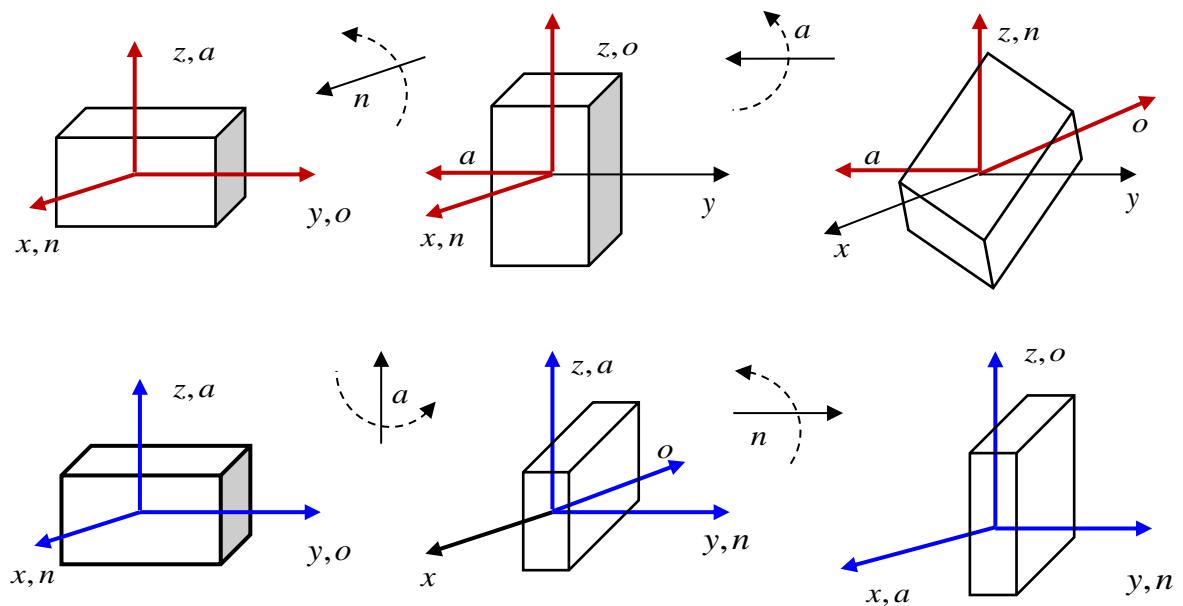


Слика 2.3. Илустрација кон Задача 2.10

Решение: Решението на задачата е прикажано на Слика 2.4 и Слика 2.5.



Слика 2.4. Ротација околу оските на референтниот координатен систем



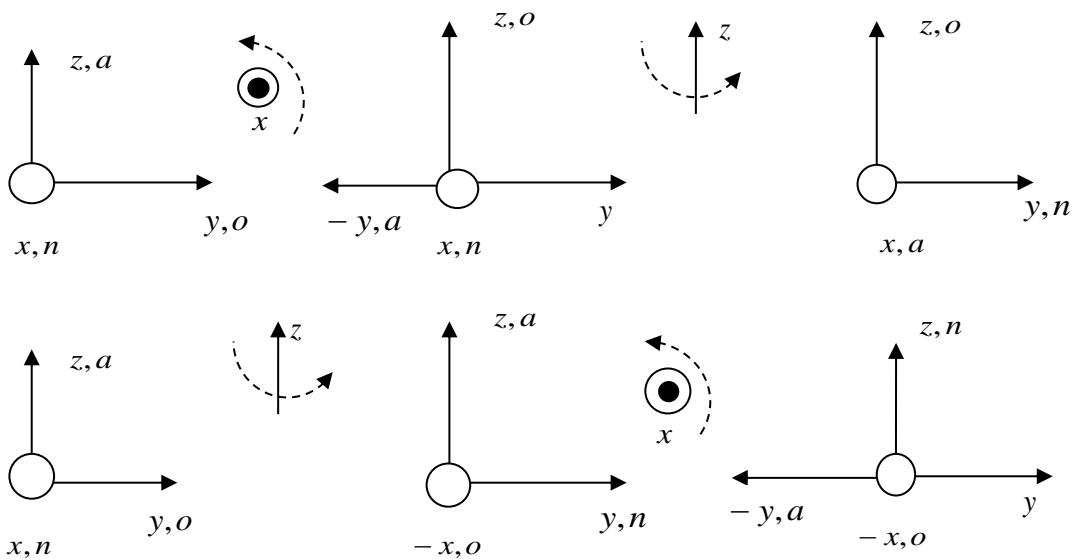
Слика 2.5. Ротација околу оските од подвижниот координатен систем

2.11. Да се прикажат графички елементарните и вкупната трансформација на еден подвижен координатен систем (n, o, a) , во однос на даден референтен координатен систем (x, y, z) , кои се резултат на следните ротации на подвижниот координатен систем:

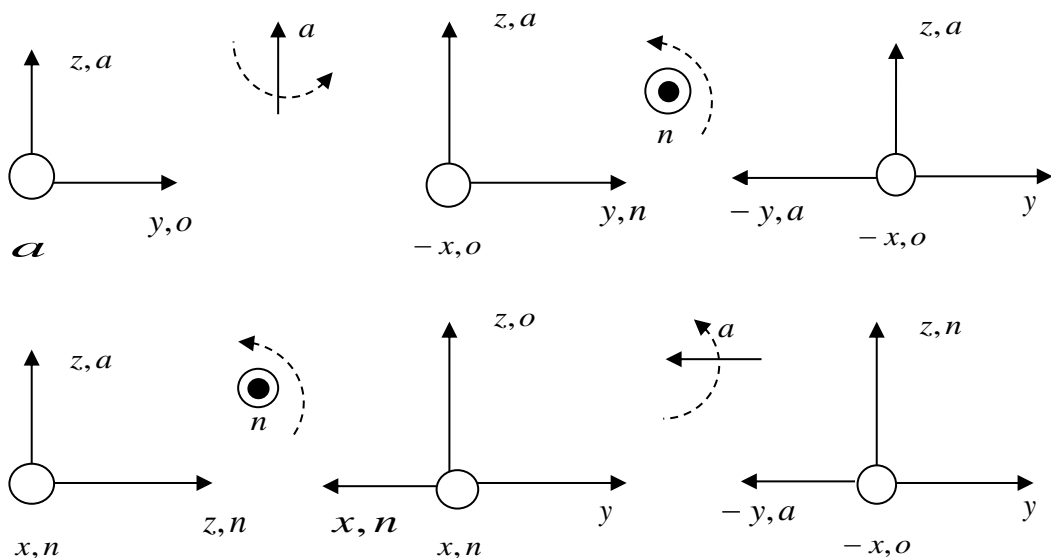
- (а) ротација за агол од 90^0 околу x – оската
- ротација за агол од 90^0 околу z – оската
- (б) ротација за агол од 90^0 околу n – оската
- ротација за агол од 90^0 околу a – оската

во наведениот и во обратен редослед. Да се усвои дека во почетокот двата координатни системи се поклопуваат.

Решение: Решението на задачата е прикажано на Слика 2.6 и Слика 2.7.



Слика 2.6. Ротација околу оските на референтниот координатен систем



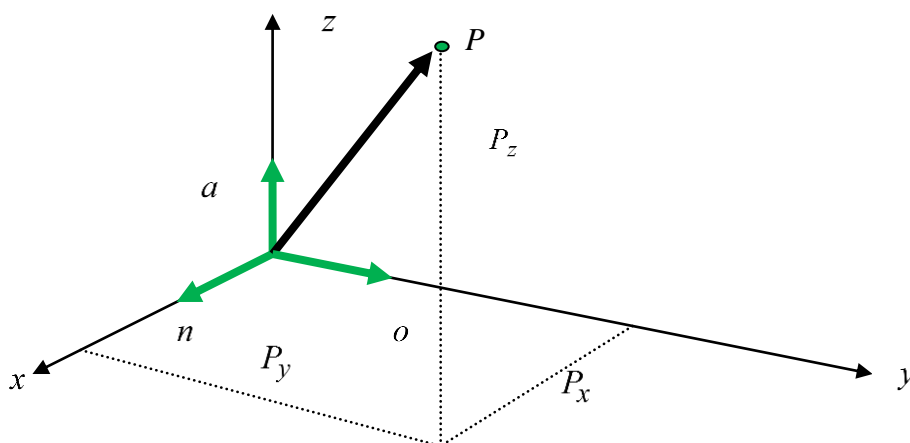
Слика 2.7. Ротација околу оските од подвижниот координатен систем

2.12. Да се изведе матрицата на ротација околу y -оската од референтниот координатен систем.

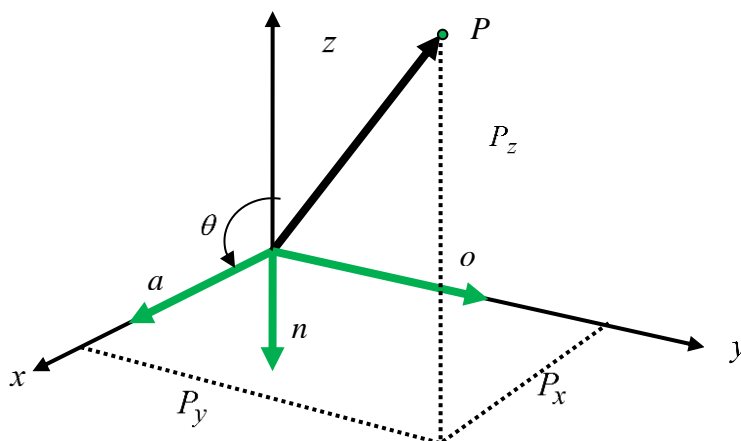
Решение: Чистата ротација околу y – оската на даден референтен координатен систем е опишана со трансформационата матрица:

$$\mathbf{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

и е прикажана на Слика 2.8.



а) пред ротацијата



б) по ротацијата

Слика 2.8. Претставување чиста ротација во просторот околу y – оската на референтниот координатен систем

Ротацијата на еден подвижен координатен систем (n, o, a) , околу y – оската од референтниот координатен систем (x, y, z) , се набљудува преку движењето на точката P придружена со него. Пред ротацијата, точката P има исти

координати во двата координатни системи, бидејќи, под претпоставка, координатните почетоци и координатните оски на двата система се поклопуваат. По ротацијата, координатите (P_n, P_o, P_a) на точката P во подвижниот координатен систем остануваат исти (затоа што точката P ротира заедно со него), а се менуваат нејзините координати (P_x, P_y, P_z) во референтниот координатен систем.

За да се определат новите координати на точката P во однос на референтниот координатен систем, истата се набљудува во дводимензионален простор, односно во (x, z) -рамнината, како што е покажано на Слика 2.9. Кога подвижниот координатен систем ротира околу y -оската, координатата P_y не се менува, но се менуваат останатите две координати P_x и P_z . Притоа, важи:

$$P_y = P_o \quad (2.81)$$

$$P_x = l_1 + l_2 = P_n \cos \theta + P_a \sin \theta \quad (2.82)$$

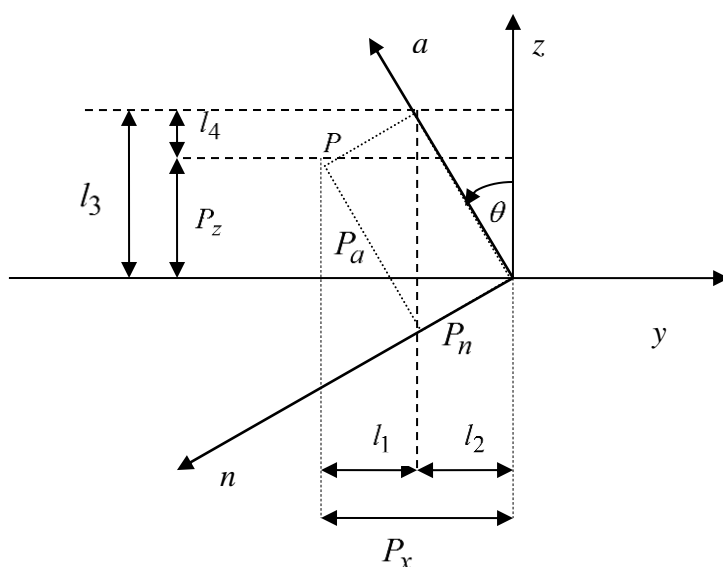
$$P_z = l_3 - l_4 = P_a \cos \theta - P_n \sin \theta \quad (2.83)$$

Равенствата (2.81) – (2.83) можат да се запишат во матричен облик на следниот начин:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

или, симболично:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{R}(y, \theta) \times \mathbf{P}_{noa} \quad (2.85)$$



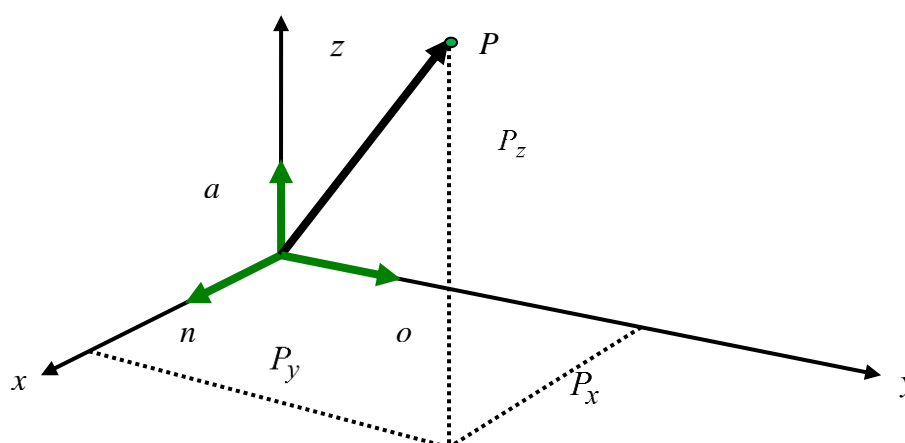
Слика 2.9. Координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем и ротирачкиот координатен систем гледано од страната на y – оската

2.13. Да се изведе матрицата на ротација околу z – оската од референтниот координатен систем.

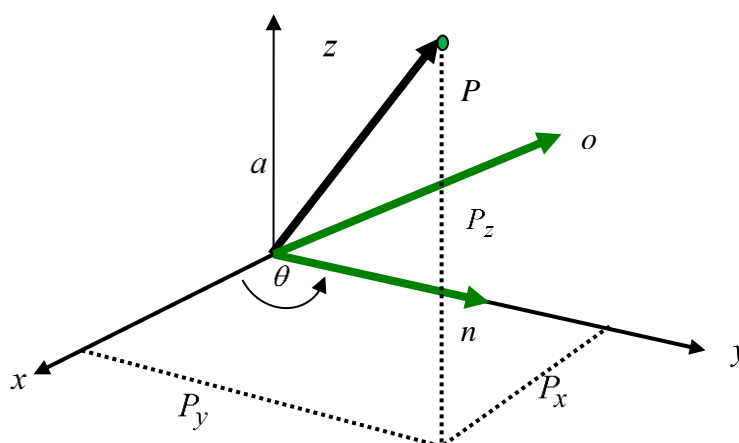
Решение: Чистата ротација околу z – оската на даден референтен координатен систем е опишана со трансформационата матрица:

$$\mathbf{R}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

и е прикажана на Слика 2.10.



а) пред ротацијата



б) по ротацијата

Слика 2.10. Претставување чиста ротација во просторот околу z – оската на референтниот координатен систем

Ротацијата на еден подвижен координатен систем (n, o, a) , околу z – оската од референтниот координатен систем (x, y, z) , се набљудува преку движењето на точката P придружена со него. Пред ротацијата, точката P има исти

координати во двата координатни системи, бидејќи, под претпоставка, координатните почетоци и координатните оски на двата система се поклопуваат. По ротацијата, координатите (P_n, P_o, P_a) на точката P во подвижниот координатен систем остануваат исти (затоа што точката P ротира заедно со него), а се менуваат нејзините координати (P_x, P_y, P_z) во референтниот координатен систем.

За да се определат новите координати на точката P во однос на референтниот координатен систем, истата се набљудува во дводимензионален простор, односно во (x, y) -рамнината, како што е покажано на Слика 2.11. Кога подвижниот координатен систем ротира околу z -оската, координатата P_z не се менува, но се менуваат останатите две координати P_x и P_y . Притоа, важи:

$$P_z = P_a \quad (2.87)$$

$$P_x = l_1 - l_2 = P_n \cos \theta - P_o \sin \theta \quad (2.88)$$

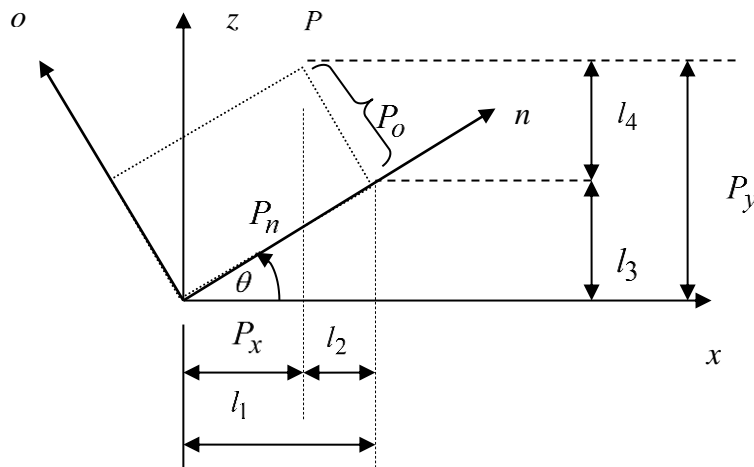
$$P_y = l_3 + l_4 = P_n \sin \theta + P_o \cos \theta \quad (2.89)$$

Равенствата (2.87) – (2.89) можат да се запишат во матричен облик на следниот начин:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

или, симболично:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{R}(z, \theta) \times \mathbf{P}_{noa} \quad (2.91)$$



Слика 2.11. Координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем и ротирачкиот координатен систем гледано од страната на z – оската

2.14. Да се покаже дека матриците на ротација околу координатните оски на референтниот координатен систем ги исполнуваат условите: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{o} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{o} = 0$, $|\mathbf{n}| = 1$, $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{o}| = 1$.

Решение: За матрицата на ротација $\mathbf{R}(x, \theta)$ се добива:

$$\begin{aligned} n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z &= (1) \cdot (0) + (0) \cdot (\cos \theta) + (0) \cdot (\sin \theta) = 0 \\ n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z &= (1) \cdot (0) + (0) \cdot (-\sin \theta) + (0) \cdot (\cos \theta) = 0 \\ a_x o_x + a_y o_y + a_z o_z &= (0) \cdot (0) + (\cos \theta) \cdot (-\sin \theta) + (\sin \theta) \cdot (\cos \theta) = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= (1)^2 + (0)^2 + (0)^2 = 1 \\ o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 &= (0)^2 + (\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1 \\ a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 &= (0)^2 + (-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.92)$$

За матрицата на ротација $\mathbf{R}(y, \theta)$ се добива:

$$\begin{aligned} n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z &= (\cos \theta) \cdot (0) + (0) \cdot (1) + (-\sin \theta) \cdot (0) = 0 \\ n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z &= (\cos \theta) \cdot (\sin \theta) + (0) \cdot (0) + (-\sin \theta) \cdot (\cos \theta) = 0 \\ a_x o_x + a_y o_y + a_z o_z &= (0) \cdot (\sin \theta) + (1) \cdot (0) + (0) \cdot (\cos \theta) = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= (\cos \theta)^2 + (0)^2 + (-\sin \theta)^2 = 1 \\ o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 &= (0)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 1 \\ a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 &= (\sin \theta)^2 + (0)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.93)$$

За матрицата на ротација $\mathbf{R}(z, \theta)$ се добива:

$$\begin{aligned} n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z &= (\cos \theta) \cdot (-\sin \theta) + (\sin \theta) \cdot (\cos \theta) + (0) \cdot (0) = 0 \\ n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z &= (\cos \theta) \cdot (0) + (\sin \theta) \cdot (0) + (0) \cdot (1) = 0 \\ a_x o_x + a_y o_y + a_z o_z &= (-\sin \theta) \cdot (0) + (\cos \theta) \cdot (0) + (0) \cdot (1) = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= (\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 + (0)^2 = 1 \\ o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 &= (-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 + (0)^2 = 1 \\ a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 &= (0)^2 + (0)^2 + (1)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.94)$$

2.15. Да се покаже дека ротационите матрици $\mathbf{R}(x, \theta)$, $\mathbf{R}(y, \theta)$ и $\mathbf{R}(z, \theta)$ имаат детерминанти еднакви на единица.

Решение: Врз основа на дефиницијата на ротационите матрици $\mathbf{R}(x, \theta)$, $\mathbf{R}(y, \theta)$ и $\mathbf{R}(z, \theta)$ се добива:

$$\det[\mathbf{R}(x, \theta)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = (1) \cdot (\cos \theta) \cdot (\cos \theta) - (\sin \theta) \cdot (-\sin \theta) \cdot (1) = 1 \quad (2.95)$$

$$\det[\mathbf{R}(y, \theta)] = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix} = (\cos \theta) \cdot (1) \cdot (\cos \theta) - (-\sin \theta) \cdot (1) \cdot (\sin \theta) = 1 \quad (2.96)$$

$$\det[\mathbf{R}(z, \theta)] = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \theta) \cdot (\cos \theta) \cdot (1) - (\sin \theta) \cdot (\sin \theta) \cdot (1) = 1 \quad (2.97)$$

Доказот може да се обопшти на следниот начин. Ротационата матрица \mathbf{R} го има следниот општ облик:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

па, за нејзината детерминанта се добива:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{R}) = |\mathbf{R}| &= \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{vmatrix} = n_x(o_y a_z - o_z a_y) + n_y(o_x a_z - o_z a_x) + \\ &+ n_z(o_x a_y - o_y a_x) = \mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{o} \times \mathbf{a}) = \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{n}|^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.99)$$

При доказот е искористен фактот дека координатните оски \mathbf{n} , \mathbf{o} и \mathbf{a} се нормални меѓу себе:

$$\mathbf{o} \times \mathbf{a} = \mathbf{n} \quad (2.100)$$

и фактот дека должината на векторот \mathbf{n} е еднаква на единица:

$$|\mathbf{n}| = 1 \quad (2.101)$$

2.16. Да се покаже дека елементарните ротации во тридимензионалниот простор не се комутативни. Упатство: како пример можат да се набљудуваат матриците $\mathbf{R}(y, \theta)$ и $\mathbf{R}(z, \theta)$.

Решение: Поаѓајќи од дефинициите на ротационите матрици $\mathbf{R}(y, \theta)$ и $\mathbf{R}(z, \theta)$, лесно се утврдува дека:

$$\mathbf{R}(y, \theta) \cdot \mathbf{R}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \cos \theta & \sin^2 \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} = \mathbf{R}(z, \theta) \cdot \mathbf{R}(y, \theta) \quad (2.102)
 \end{aligned}$$

2.17. Да се определи положбата на точката $\mathbf{P} = [2 \ 3 \ 4]^T$ во просторот по нејзината ротација за агол $\theta = 45^0$ околу x -оската на референтниот координатен систем.

Решение: Новите координати на точката P се определуваат на следниот начин:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{R}(x, \theta) \times \mathbf{P}_{noa} = \mathbf{R}(x, 45^0) \times \mathbf{P}_{noa} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^0 & -\sin 45^0 \\ 0 & \sin 45^0 & \cos 45^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3\sqrt{2}/2 - 4\sqrt{2}/2 \\ 3\sqrt{2}/2 + 4\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad (2.104)
 \end{aligned}$$

2.18. Да се определи положбата на точката $\mathbf{P} = [3 \ 5 \ 7]^T$ во просторот по нејзината ротација за агол $\theta = 30^0$ околу z -оската на референтниот координатен систем.

Решение: Новите координати на точката P се:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{R}(z, \theta) \times \mathbf{P}_{noa} = \mathbf{R}(z, 30^0) \times \mathbf{P}_{noa} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^0 & -\sin 30^0 & 0 \\ \sin 30^0 & \cos 30^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3}/2 - 5/2 \\ 3/2 + 5\sqrt{3}/2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (2.106)
 \end{aligned}$$

2.19. Точката P во просторот е определена со координатите $(3,5,7)$ во однос на избран референтен координатен систем. Кон неа е придружен подвижен координатен систем, кој почетно се поклопува со референтниот. Да се определат координатите на точката P , ако подвижниот координатен систем се заврти за агол $\theta = 120^0$ околу x -оската.

Решение: За новата положба на точката P се добива:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ 0 & \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{5+7\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}-7}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.107)$$

2.20. Дадена е ротационата матрица:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ 4 & 4 & -7 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Да се определи оската \mathbf{k} и аголот на ротација θ околу оваа оска, со кои може да се оствари зададената трансформација.

Решение: Бидејќи:

$$\cos \theta = \frac{\text{Trag} \mathbf{R} - 1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \quad (2.109)$$

за аголот на ротација θ се добива:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.110)$$

Единичниот вектор \mathbf{l} со кој е определен правецот на оската \mathbf{k} изнесува:

$$\mathbf{l} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

2.21. Дадена е ротационата матрица:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & 3/4 & 1/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

Да се определи оската \mathbf{k} и аголот на ротација θ околу оваа оска, со кои може да се оствари зададената трансформација.

Решение: Бидејќи:

$$\cos \theta = \frac{\text{Trag} \mathbf{R} - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \quad (2.113)$$

за аголот на ротација θ се добива:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \quad (2.114)$$

Единичниот вектор \mathbf{l} со кој е определен правецот на оската \mathbf{k} изнесува:

$$\mathbf{l} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

2.22. Да се определи ориентацијата на подвижниот координатен систем \mathbf{F} , претставен со трансформационата матрица:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

и позицијата на неговиот координатен почеток P , во однос на референтниот координатен систем.

Решение: Трансформационата матрица \mathbf{F} секогаш може да се претстави во облик:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & | & \mathbf{P} \\ - & - & - \\ \mathbf{0} & | & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 0 & | & 15 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

каде што со:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

е претставена ориентацијата на набљудуваниот координатен систем \mathbf{F} во однос на референтниот, а:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

ја дефинира позицијата на неговиот координатен почеток во однос на референтниот координатен систем.

Од изгледот на матрицата \mathbf{R} следува дека станува збор за ротација околу x -оската од референтниот координатен систем, бидејќи првата колона во \mathbf{R} е $[1 \ 0 \ 0]^T$, па:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sin \theta = -1 \\ \cos \theta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = -90^0 \quad (2.120)$$

Со оглед на тоа дека нормирачкиот фактор за \mathbf{P} е 3, координатите на точката P ќе бидат:

$$P_x = \frac{x}{w} = 3 \quad (2.121)$$

$$P_y = \frac{y}{w} = 1 \quad (2.122)$$

$$P_z = \frac{z}{w} = 5 \quad (2.123)$$

2.23. Точката P е придружена со координатниот систем \mathbf{B} кој, во почетокот, се поклопува со референтниот координатен систем \mathbf{A} . Положбата на точката P во однос на координатниот систем \mathbf{B} е определена со координатите ${}^{\mathbf{B}}\mathbf{P} = [3 \ 4 \ -5]^T$. Нека, под претпоставка, координатниот систем \mathbf{B} ги изврши следните елементарни трансформации:

- ротација за агол $\theta = -30^0$ околу x – оската
- транслација за 3 единици долж y – оската
- ротација за агол $\theta = 45^0$ околу a – оската
- транслација за 6 единици долж n – оската и за 9 единици долж o – оската

во наведениот редослед. Да се определат новите координати на точката P во однос на референтниот координатен систем \mathbf{A} .

Решение: Трансформацијата на точката P е определена со производот:

$${}^{\mathbf{A}}\mathbf{P} = {}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}_{\mathbf{B}} \times {}^{\mathbf{B}}\mathbf{P} \quad (2.124)$$

каде што ${}^{\mathbf{A}}\mathbf{P}$ се новите координати на точката P во однос на референтниот координатен систем \mathbf{A} , ${}^{\mathbf{B}}\mathbf{P}$ се почетните координати на точката P во однос на координатниот систем \mathbf{B} , и трансформационата матрица ${}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}_{\mathbf{B}}$ го опишува движењето на координатниот систем \mathbf{B} во однос на координатниот систем \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} {}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}_{\mathbf{B}} &= \text{Trans}(0,3,0)\mathbf{R}(x,-30^0)\mathbf{R}(z,45^0)\mathbf{T}(6,9,0) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & -4.2426 \\ 0.6124 & 0.6124 & -0.5000 & 2.1742 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0.8660 & 9.9155 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

Следствено, за бараните координати на точката P се добива:

$${}^A\mathbf{P} = {}^A\mathbf{T}_B \times {}^B\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.7071 & 0 & -4.24 \\ 0.6124 & 0.6124 & -0.5 & 2.174 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0.866 & 9.915 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.95 \\ 8.96 \\ 8.06 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

2.24. Точката P е придружена со координатниот систем \mathbf{B} кој, во почетокот, се поклопува со референтниот координатен систем \mathbf{A} . Положбата на точката P во однос на координатниот систем \mathbf{B} е определена со координатите ${}^B\mathbf{P} = [5 \ 3 \ 4]^T$. Нека, под претпоставка, координатниот систем \mathbf{B} ги изврши следните елементарни трансформации:

- ротација за агол $\theta = 90^0$ околу x – оската
- транслација за 3 единици долж y – оската, за 6 единици долж z – оската и за 5 единици долж x – оската
- ротација за агол $\theta = 90^0$ околу z – оската

во наведениот редослед. Да се определат новите координати на точката P во однос на референтниот координатен систем \mathbf{A} .

Решение: Решението е прикажано графички на Слика 2.12. Трансформацијата на точката P е определена со производот:

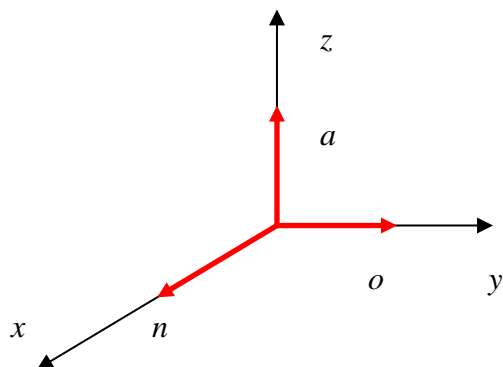
$${}^A\mathbf{P} = {}^A\mathbf{T}_B \times {}^B\mathbf{P} \quad (2.127)$$

каде што ${}^A\mathbf{P}$ се новите координати на точката P во однос на референтниот систем \mathbf{A} , ${}^B\mathbf{P}$ се почетните координати на точката P во однос на координатниот систем \mathbf{B} , и трансформационата матрица ${}^A\mathbf{T}_B$ го опишува движењето на координатниот систем \mathbf{B} во однос на координатниот систем \mathbf{A} :

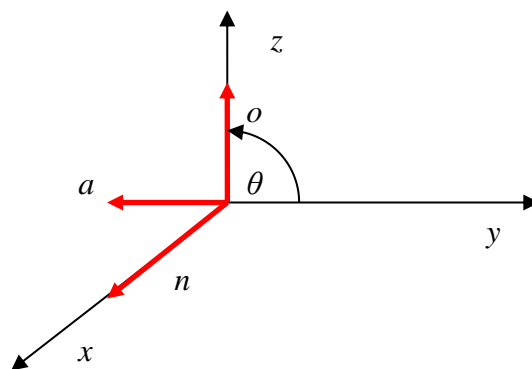
$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{T}_B &= \mathbf{R}(z, 90^0) \text{Trans}(5, 3, 6) \mathbf{R}(x, 90^0) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.128) \end{aligned}$$

Следствено, за бараните координати на точката P се добива:

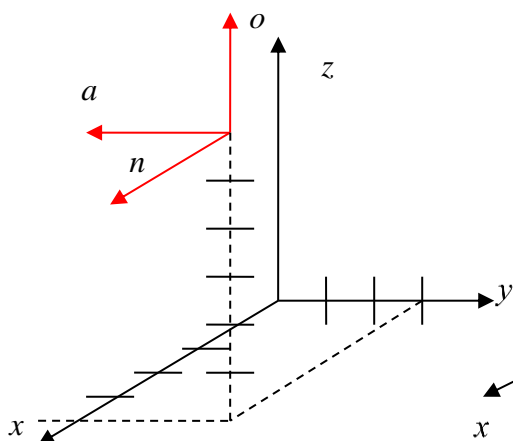
$${}^A\mathbf{P} = {}^A\mathbf{T}_B \times {}^B\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.129)$$



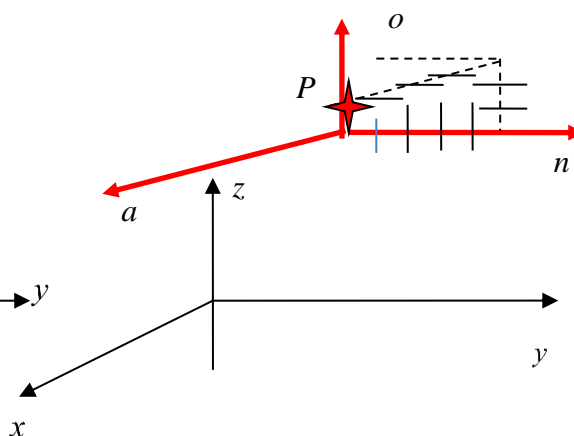
а) пред трансформациите



б) по првата трансформација



в) по втората трансформација

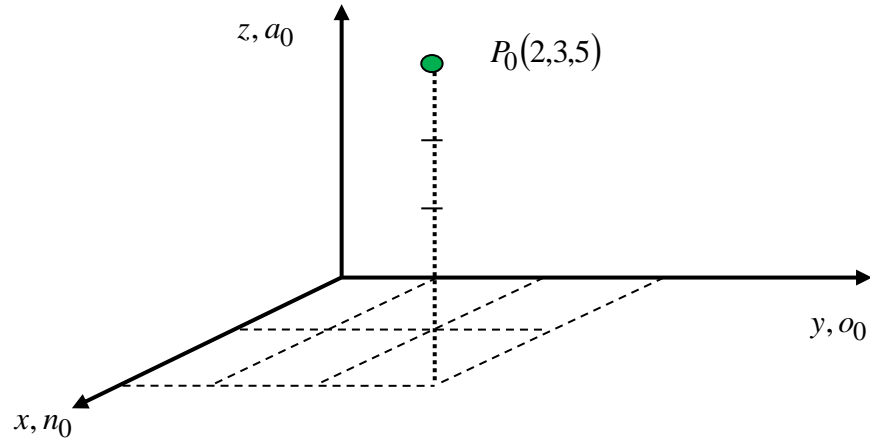


г) по третата трансформација

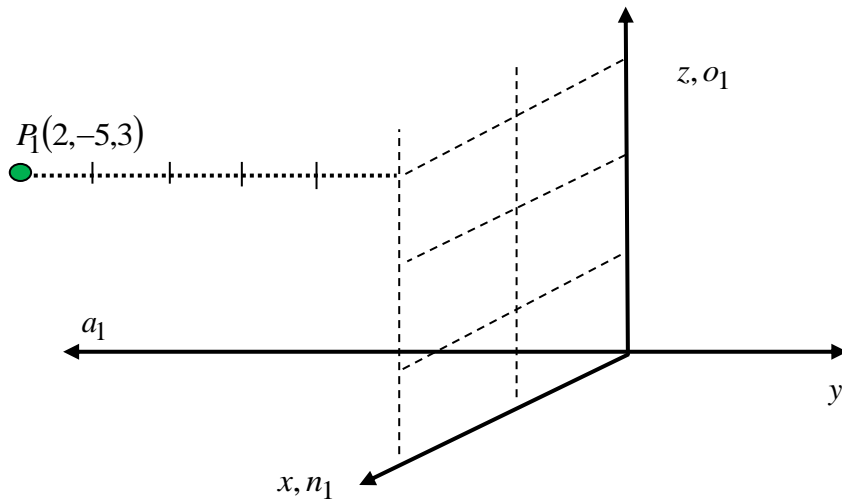
Слика 2.12. Графички приказ на решението на Задача 2.24

2.25. Положбата на точката P во просторот, во однос на локалниот координатен систем \mathbf{B} придружен со неа, е зададена со векторот ${}^B\mathbf{P} = [2 \ 3 \ 5]^T$. Почетокот од координатниот систем \mathbf{B} е сместен во почетокот од референтниот координатен систем \mathbf{A} и двата системи се паралелни еден на друг. Да се определи и прикаже графички положбата на точката P во однос на референтниот координатен систем \mathbf{A} по следните трансформации (елементарни движења) на подвижниот координатен систем \mathbf{B} : ротација за агол од 90° околу x -оската, ротација за агол од 90° околу локалната a -оска, транслација за 3 единици долж y -оската, за 6 единици долж z -оската и за 5 единици долж x -оската.

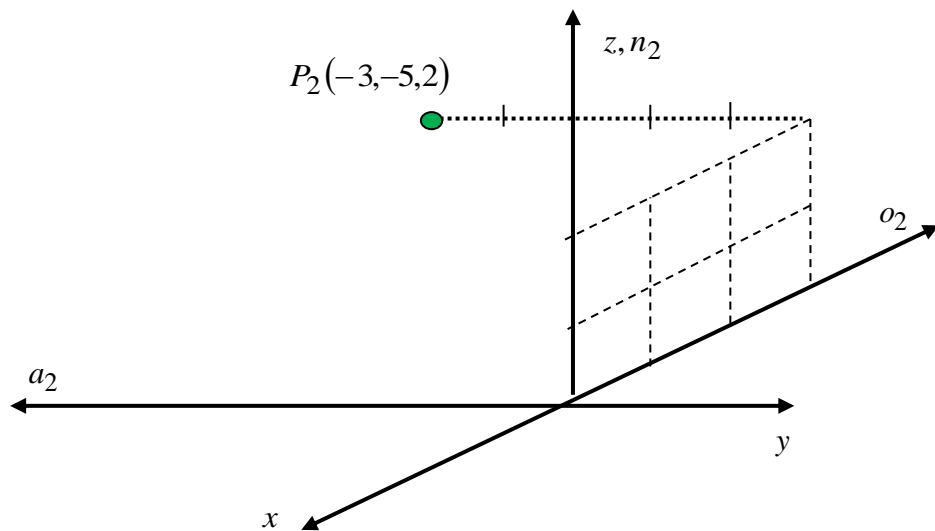
Решение: Решението е прикажано графички на Слика 2.13.



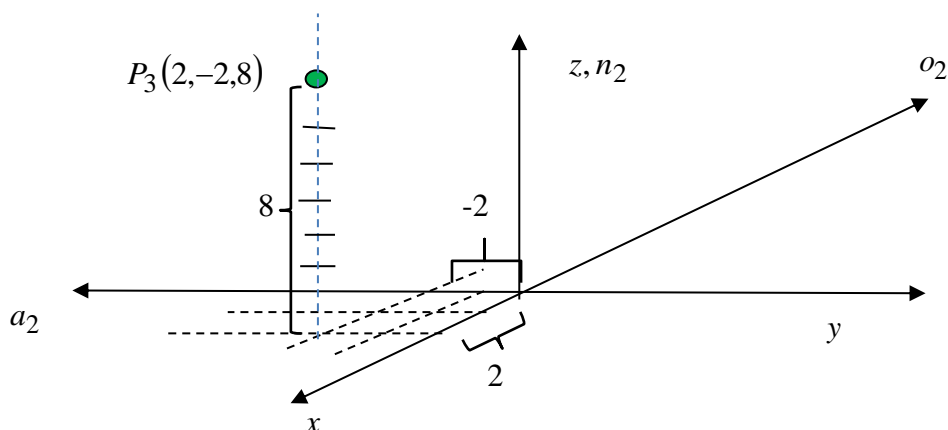
(a) Почетна состојба



(б) Состојба по ротација за агол од 90^0 околу x -оската



(в) Состојба по ротација за агол од 90^0 околу локалната a -оска



(г) Состојба по translација за 3 единици долж y -оска, за 6 единици долж z -оската и за 5 единици долж x -оската

Слика 2.13. Графички приказ на решението на Задача 2.25

Трансформацијата на точката P е определена со производот:

$$\begin{aligned}
 {}^A T_B &= \text{Trans}(5,3,6) \text{Rot}(x, 90^0) \text{Rot}(a, 90^0) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.130)
 \end{aligned}$$

па, нејзините нови координати во однос на референтниот координатен систем се:

$${}^A P = {}^A T_B \times {}^B P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

2.26. Положбата на точката P во просторот во однос на локалниот координатен систем \mathbf{B} придружен со неа е зададена со векторот ${}^B P = [2 \ 1 \ 0]^T$. Почетокот од координатниот систем \mathbf{B} е сместен во почетокот од референтниот координатен систем \mathbf{A} и двата системи се паралелни еден на друг. Да се определи положбата на точката P во однос на референтниот координатен систем \mathbf{A} по следните трансформации (елементарни движења) на подвижниот координатен систем \mathbf{B} :

- ротација за агол θ околу локалната x -оска
- ротација за агол ϕ околу локалната z -оска
- ротација за агол α околу референтната z -оска
- ротација за агол β околу локалната y -оска
- ротација за агол γ околу референтната x -оска

За поголема едноставност на пресметките да се претпостави дека сите агли на ротација се еднакви помеѓу себе и изнесуваат 90^0 .

Решение: Нека локалната x -оска ја означиме со n , локалната y -оска со o и локалната z -оска со a . Вкупната трансформација на локалниот координатен систем \mathbf{B} во однос на референтниот координатен систем \mathbf{A} е претставена со матрицата:

$$\begin{aligned} {}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}_{\mathbf{B}} &= \mathbf{R}(x, \gamma)\mathbf{R}(z, \alpha)\mathbf{R}(n, \theta)\mathbf{R}(a, \phi)\mathbf{R}(o, \beta) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\gamma & -S\gamma & 0 \\ 0 & S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.132)$$

Бидејќи елементарните движења претставуваат чисти ротации, кои имаат за последица само промена на ориентацијата на координатниот систем \mathbf{B} , а не и на неговата позиција, наместо горните матрици со димензија 4×4 доволно е да се измножат долните матрици со димензија 3×3 :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\gamma & -S\gamma \\ 0 & S\gamma & C\gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.133)$$

Положбата на точката P во однос на референтниот координатен систем \mathbf{A} по извршените трансформации е:

$${}^{\mathbf{A}}\mathbf{P} = {}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}_{\mathbf{B}} \times {}^{\mathbf{B}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

2.27. Точката P е придружена со координатниот систем \mathbf{B} кој, во почетокот, се поклопува со референтниот координатен систем \mathbf{A} . Положбата на точката P во однос на координатниот систем \mathbf{B} е определена со координатите ${}^{\mathbf{B}}\mathbf{P} = [3 \ 4 \ -5]^T$. Нека, под претпоставка, координатниот систем \mathbf{B} ги изврши следните елементарни трансформации:

- ротација за агол $\theta = -30^\circ$ околу x – оската
- translација за 3 единици долж y – оската
- ротација за агол $\theta = 45^\circ$ околу a – оската
- translација за 6 единици долж n – оската и за 9 единици долж o – оската

во наведениот редослед. Да се определат новите координати на точката P во однос на референтниот координатен систем \mathbf{A} .

Решение: Бидејќи трансформацијата на точката P е:

$$\begin{aligned}
 {}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}_{\mathbf{B}} &= \text{Trans}(0,3,0)\mathbf{R}(x,-30^\circ)\mathbf{R}(a,45^\circ)\text{Trans}(6,9,0) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & -2.1213 \\ 0.6124 & 0.6124 & 0.5000 & 12.1856 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0.8660 & -5.3033 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.135}
 \end{aligned}$$

за нејзините нови координати се добива:

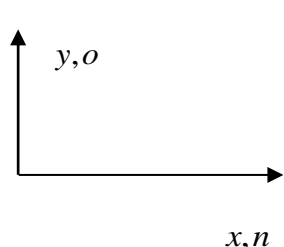
$$\begin{aligned}
 {}^{\mathbf{A}}\mathbf{P} &= {}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}_{\mathbf{B}} \times {}^{\mathbf{B}}\mathbf{P} = \\
 {}^{\mathbf{A}}\mathbf{P} &= {}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}_{\mathbf{B}} \times {}^{\mathbf{B}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & -2.1213 \\ 0.6124 & 0.6124 & 0.5000 & 12.1856 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0.8660 & -5.3033 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.8284 \\ 13.9722 \\ -12.1083 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.136}
 \end{aligned}$$

каде што ${}^{\mathbf{A}}\mathbf{P}$ се новите координати на точката P во однос на референтниот систем \mathbf{A} , ${}^{\mathbf{B}}\mathbf{P}$ се почетните координати на точката P во однос на координатниот систем \mathbf{B} , и трансформационата матрица ${}^{\mathbf{A}}\mathbf{T}_{\mathbf{B}}$ го опишува движењето на координатниот систем \mathbf{B} во однос на координатниот систем \mathbf{A} .

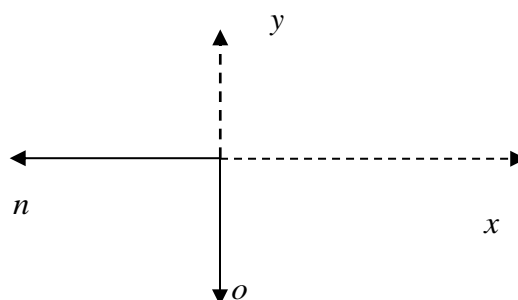
2.28. Графички да се прикаже трансформацијата на подвижниот координатен систем (n, o, a) во однос на референтниот координатен систем (x, y, z) , ако подвижниот координатен систем ги извршил следните елементарни движења:
Ротација за агол π околу a – оската

- Транслација долж (x, y, z) претставена со векторот $[-1 \ -1 \ 0]^T$
- Ротација за агол $\pi/2$ околу a -оската
- Транслација долж (n, o, a) претставена со векторот $[2 \ 1 \ 0]^T$

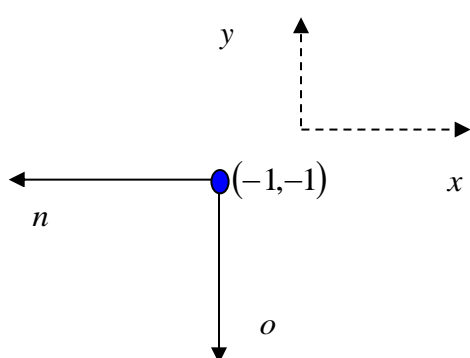
Решение: Бараното решение е прикажано на Слика 2.14.



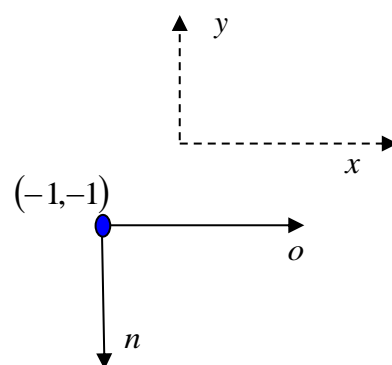
(а) пред трансформациите



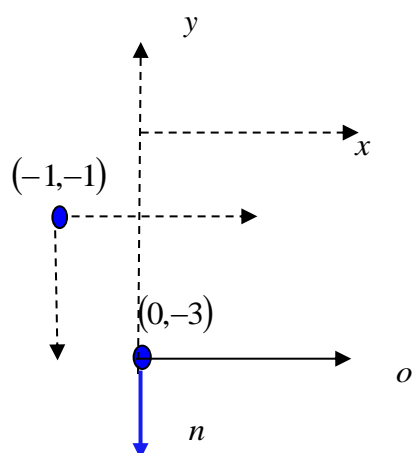
(б) по ротацијата за π околу a -оската



(в) по транслацијата за $[-1 \ -1 \ 0]^T$



(г) по ротацијата за $\pi/2$ околу a -оската



(д) по транслацијата за $[2 \ 1 \ 0]^T$

Слика 2.14. Графичко решение на Задача 2.28

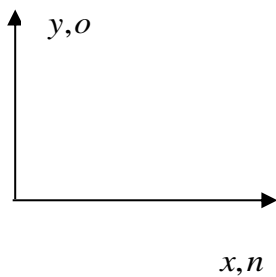
$$\begin{aligned}
 & \mathbf{Tran}(-1,-1,0)\mathbf{R}(z,\pi)\mathbf{R}\left(z,\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{Tran}(2,1,0) = \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.137)
 \end{aligned}$$

2.29. Графички да се прикаже трансформацијата на подвижниот координатен систем (n,o,a) во однос на референтниот координатен систем (x,y,z) , ако подвижниот координатен систем ги извршил следните елементарни движења:

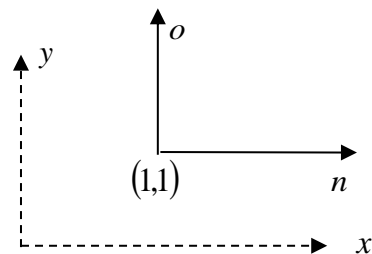
- Транслација претставена со векторот $[1 \ 1 \ 0]^T$
- Ротација за агол π околу a -оската
- Транслација претставена со векторот $[-2 \ -2 \ 0]^T$
- Ротација за агол $\pi/2$ околу a -оската

(Забелешка: сите движења се во однос на подвижниот координатен систем.)

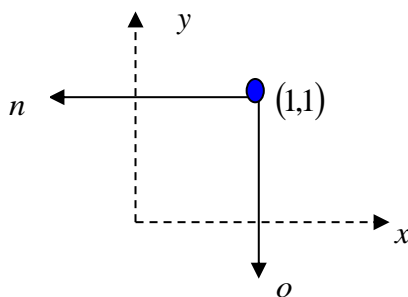
Решение: Бараното решение графички е прикажано на Слика 2.15.



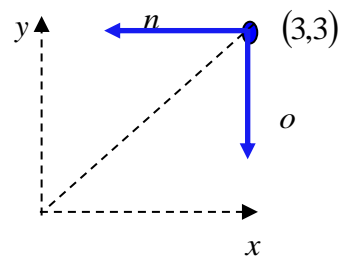
(а) пред трансформациите



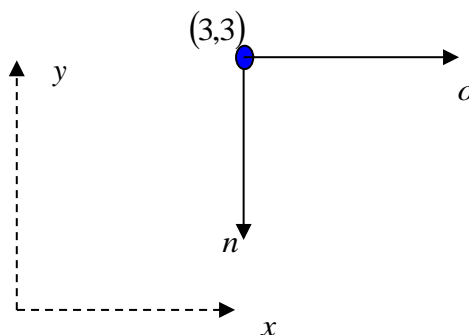
(б) по транслагацијата за $[1 \ 1 \ 0]^T$



(в) по ротацијата за π околу a -оската



(г) по транслагацијата за $[-2 \ -2 \ 0]^T$



(д) по ротацијата за $\pi/2$ околу a – оската

Слика 2.15. Графичко решение на Задача 2.29

$$\begin{aligned}
 & \text{Tran}(1,1,0)\mathbf{R}(z,\pi)\text{Tran}(-2,-2,0)\mathbf{R}\left(z,\frac{\pi}{2}\right) = \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.138)
 \end{aligned}$$

2.30. Да се определат инверзните матрици кон следните трансформациони матрици:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0.527 & -0.574 & 0.628 & 2 \\ 0.369 & 0.819 & 0.439 & 5 \\ -0.766 & 0 & 0.643 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0.92 & 0 & 0.39 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ -0.39 & 0 & 0.92 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

Решение: Ако трансформационата матрица \mathbf{T} се претстави во облик:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

тогаш за нејзината инверзна матрица се добива:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

каде што елементите на векторот \mathbf{V} се претставени со следните скаларни производи:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \\ -\mathbf{o} \cdot \mathbf{P} \\ -\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

Притоа векторите \mathbf{n} , \mathbf{o} и \mathbf{a} ги претставуваат колоните на матрицата \mathbf{R} . Во согласност со ова, за инверзната матрица кон матрицата \mathbf{T}_1 се добива:

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.527 & 0.369 & -0.766 & -0.601 \\ -0.574 & 0.819 & 0 & 5-2.947 \\ 0.628 & 0.439 & 0.643 & -5.38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

Аналогно:

$$\mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0.92 & 0 & -0.39 & -3.82 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0.39 & 0 & 0.92 & 5.38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

2.31. Нека се дадени три координатни системи $\mathbf{F}(o_1, x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{F}(o_2, x_2, y_2, z_2)$ и $\mathbf{F}(o_3, x_3, y_3, z_3)$. Да се определи трансформационата матрица ${}^2\mathbf{F}_3$, ако:

$${}^1\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

$${}^1\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

Решение:

$${}^2\mathbf{F}_3 = ({}^1\mathbf{F}_2)^{-1} \times ({}^1\mathbf{F}_3) = ({}^2\mathbf{F}_1) \times ({}^1\mathbf{F}_3) \quad (2.148)$$

Бидејќи ${}^1\mathbf{F}_2$ е ротациона матрица, $({}^1\mathbf{F}_2)^{-1} = ({}^1\mathbf{F}_2)^T$. Следствено:

$${}^2\mathbf{F}_3 = ({}^1\mathbf{F}_2)^T \times ({}^1\mathbf{F}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

2.32. Подвижните координатни системи **B** и **A** првобитно се поклопуваат. Координатниот систем **B** најнапред ротира околу својата y -оска за агол θ , а потоа ротира околу новата z -оска за агол ϕ . Да се определи 3×3 димензиона матрица на ротација ${}^A\mathbf{R}_B$, со помош на која векторот на положба ${}^B\mathbf{P}$ се трансформира во векторот ${}^A\mathbf{P}$.

Решение: Трансформацијата на координатниот систем **B** во однос на координатниот систем **A** може да се претстави на следниот начин:

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{R}_B &= \mathbf{R}(y, \theta)\mathbf{R}(z, \phi) = \\ &= \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta \cdot C\phi & -C\theta \cdot S\phi & S\theta \\ S\phi & C\phi & 0 \\ -S\theta \cdot C\phi & S\theta \cdot S\phi & C\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.150)$$

2.33. Да се одреди точниот редослед на елементарни трансформации со помош на кои може да се „одротира“ еден сферен координатен систем и да се направи паралелен со референтниот координатен систем.

Решение: Бидејќи:

$$\begin{aligned} {}^R\mathbf{T}_P &= \mathbf{T}_{sph}(r, \beta, \gamma) = \mathbf{R}(z, \gamma)\mathbf{R}(y, \beta)\mathbf{Trans}(0, 0, r) = \\ &= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & S\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C\beta \cdot S\gamma & C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.151)$$

матрицата ${}^R\mathbf{T}_P = \mathbf{T}_{sph}(r, \beta, \gamma)$ треба да се помножи оддесно најнапред со матрицата $\mathbf{R}(o, -\beta)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{sph}(r, \beta, \gamma) \cdot \mathbf{R}(o, -\beta) &= \\ &= \begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & S\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C\beta \cdot S\gamma & C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(-\beta) & 0 & S(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S(-\beta) & 0 & C(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & S\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C\beta \cdot S\gamma & C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\beta & 0 & -S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C^2\beta \cdot C\gamma + S^2\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & -S\beta \cdot C\beta \cdot C\gamma + S\beta \cdot C\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C^2\beta \cdot S\gamma + S^2\beta \cdot S\gamma & C\gamma & -S\beta \cdot C\beta \cdot S\gamma + S\beta \cdot C\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ 0 & 0 & S^2\beta + C^2\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 & rS\beta \cdot C\gamma \\ S\gamma & C\gamma & 0 & rS\beta \cdot S\gamma \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.152}
 \end{aligned}$$

и, потоа, со матрицата $\mathbf{R}(a, -\gamma)$:

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{T}_{sph}(r, \beta, \gamma) \cdot \mathbf{R}(o, -\beta) \cdot \mathbf{R}(a, -\gamma) = \\
 &= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 & rS\beta \cdot C\gamma \\ S\gamma & C\gamma & 0 & rS\beta \cdot S\gamma \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(-\gamma) & -S(-\gamma) & 0 & 0 \\ S(-\gamma) & C(-\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 & rS\beta \cdot C\gamma \\ S\gamma & C\gamma & 0 & rS\beta \cdot S\gamma \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\gamma & S\gamma & 0 & 0 \\ -S\gamma & C\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rS\beta \cdot C\gamma \\ 0 & 1 & 0 & rS\beta \cdot S\gamma \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.153}
 \end{aligned}$$

2.34. Положбата на една роботска рака во просторот е дефинирана во сферен координатен систем. Ако тој сферен координатен систем се „одротира“ со помош на соодветни елементарни трансформации, трансформационата матрица која ја претставува положбата на набљудуваната роботска рака во сферен координатен систем ќе биде:

$$\mathbf{T}_{sph} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.1375 \\ 0 & 1 & 0 & 2.195 \\ 0 & 0 & 1 & 3.214 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.154}$$

Да се определат сферните координати (r, β, γ) со кои се остварува дадената положба на роботската рака.

Решение:

$$\begin{cases} x = rS\beta C\gamma \\ y = rS\beta S\gamma \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{rS\beta S\gamma}{rS\beta C\gamma} = \frac{S\gamma}{C\gamma} = \operatorname{tg}\gamma \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = 34.9767^{\circ} \approx 35^{\circ} \quad (2.155)$$

$$\begin{cases} x = rS\beta C\gamma \\ y = rS\beta S\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xC\gamma = rS\beta C^2\gamma \\ yS\gamma = rS\beta S^2\gamma \end{cases} \Rightarrow xC\gamma + yS\gamma = rS\beta C^2\gamma + rS\beta S^2\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xC\gamma + yS\gamma = rS\beta \Rightarrow S\beta = \frac{xC\gamma + yS\gamma}{r}$$

$$rC\beta = z \Rightarrow C\beta = \frac{z}{r}$$

$$\begin{cases} S\beta = \frac{xC\gamma + yS\gamma}{r} \\ C\beta = \frac{z}{r} \end{cases} \Rightarrow \frac{S\beta}{C\beta} = \frac{xC\gamma + yS\gamma}{z} = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{xC\gamma + yS\gamma}{z}\right) = 49.9911^{\circ} \approx 50^{\circ} \quad (2.156)$$

$$r = \frac{z}{C\beta} = 4.9992 \approx 5 \quad (2.157)$$

2.35. Положбата на една роботска рака во просторот е опишана со помош на сферен координатен систем. Ако подвижниот координатен систем придружен кон роботската рака се доведе повторно во првобитната ориентација и се направи паралелен со референтниот координатен систем, матрицата \mathbf{T}_{sph} ќе го има следниот изглед:

$$\mathbf{T}_{sph} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

а) Да се определат вредностите за r, β, γ со кои се постига дефинираната положба.

б) Да се најдат елементите на оригиналната матрица \mathbf{T}_{sph} пред таа да се „одротира“.

Решение: а)

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = 45^{\circ} \quad (2.159)$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{xC\gamma + yS\gamma}{z}\right) = 60^{\circ} \quad (2.160)$$

$$r = \frac{z}{C\beta} = 2.4495 \approx 2.45 \quad (2.161)$$

$$\mathbf{T}_{sph}(r, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & S\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C\beta \cdot S\gamma & C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3536 & -0.7071 & 0.6124 & 1.5000 \\ 0.3536 & 0.7071 & 0.6124 & 1.5000 \\ -0.8660 & 0 & 0.5000 & 1.2247 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

2.36. Да се определи ориентацијата на координатниот систем \mathbf{B} во однос на даден референтен систем \mathbf{A} , кој се добива по неговата ротација дефинирана со Ојлеровите агли ZYZ . Под претпоставка, во почетниот миг на набљудување координатниот систем \mathbf{B} се поклопува со референтниот систем \mathbf{A} .

Решение: Ојлеровите агли ZYZ ги дефинираат следните ротации околу оските (n, o, a) на подвижниот координатен систем \mathbf{B} во наведениот редослед: $\mathbf{R}(a, \theta_1)$, $\mathbf{R}(o, \theta_2)$ и $\mathbf{R}(a, \theta_3)$. Оттука, вкупната ротација на набљудуваниот координатен систем ќе биде претставена со производот:

$${}^{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\mathbf{B}} = \mathbf{R}(a, \theta_1)\mathbf{R}(o, \theta_2)\mathbf{R}(a, \theta_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

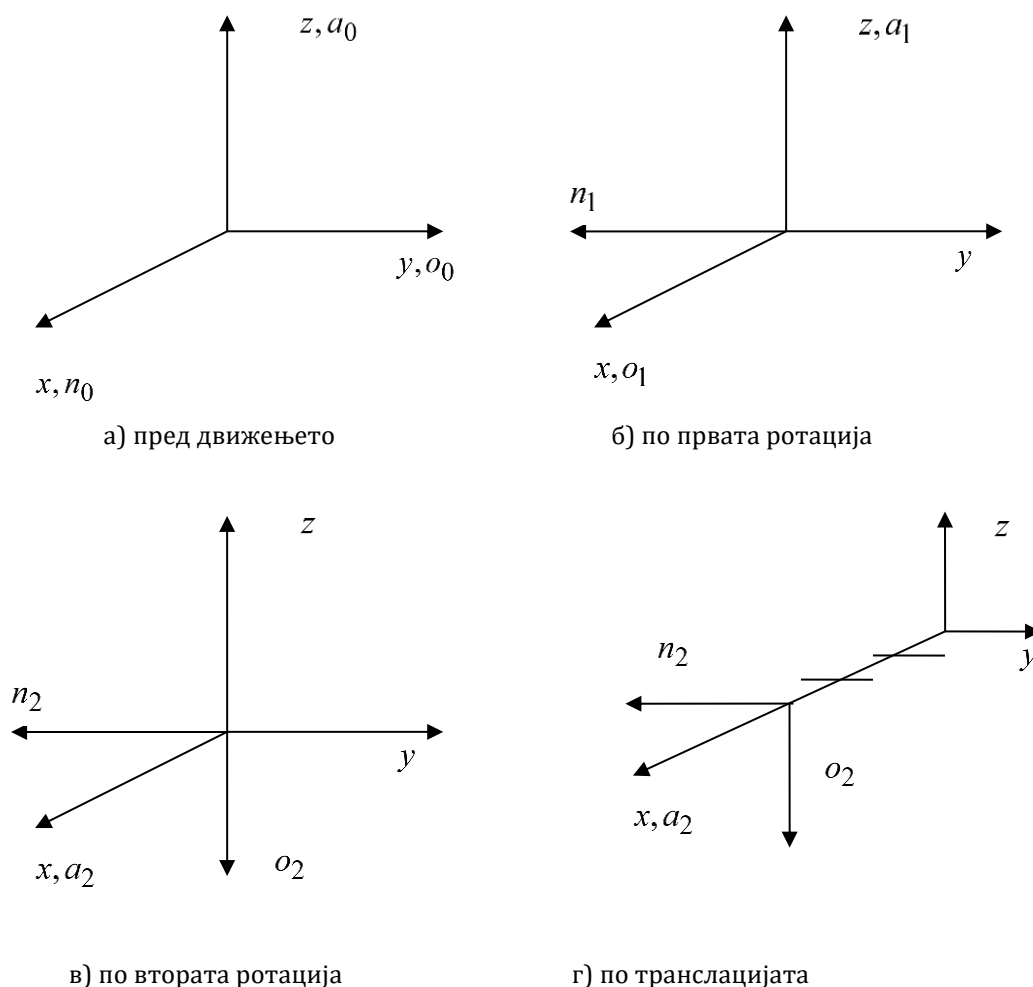
$$= \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 - S_1S_3 & -C_1C_2S_3 - S_1C_3 & C_1S_2 \\ S_1C_2C_3 + C_1S_3 & -S_1C_2S_3 + C_1C_3 & S_1S_2 \\ -S_2C_3 & S_2S_3 & C_2 \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

2.37. Подвижен координатен систем ${}^{\mathbf{U}}\mathbf{F}$, кој првобитно е поставен да се поклопува со референтниот координатен систем \mathbf{U} , е подложен на следните елементарни движења (трансформации):

- ротација за агол од -90° околу z -оската,
- ротација за агол од 90° околу y -оската
- транслација за 3 единици долж x -оската

во наведениот редослед. Да се определи новата положба на подвижниот координатен систем во однос на референтниот и да се прикаже графички. Потоа истата (новата ориентација на подвижниот координатен систем) да се изрази преку Ојлеровите агли.

Решение:



Слика 2.16. Графички приказ на елементарните трансформации и новата положба на подвижниот координатен систем U_F

$$\mathbf{T} = \mathbf{Trans}(3,0,0) \times \mathbf{Rot}(y, 90^0) \times \mathbf{Rot}(z, -90^0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a_y}{a_x} = \operatorname{arctg}(0) = 0^0 \quad (2.165)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{-n_x S\varphi + n_y C\varphi}{-o_x S\varphi + o_y C\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{n_y}{o_y} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -90^0 \quad (2.166)$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{a_x C\varphi + a_y S\varphi}{a_z} = \operatorname{arctg} \frac{a_x}{a_z} = \operatorname{arctg}(\infty) = 90^0 \quad (2.167)$$

2.38. Подвижен координатен систем U_B е поместен за 5 единици долж n -оската, заротиран за агол од 45^0 околу o -оската, заротиран за агол од 90^0 околу z -оската, поместен за $\sqrt{2}$ единици долж a -оската и заротиран за агол од 90^0 околу x -оската во наведениот редослед.

а) Да се определи матрицата на резултантното движење.

б) Да се определат правоаголните координати и Ојлеровите ZYZ агли со кои се постига истата положба и ориентација во просторот на набљудуваниот подвижен координатен систем.

Решение: а) Трансформационата матрица која го претставува вкупното движење на набљудуваната роботска рака се добива како производ од матриците на елементарните трансформации во наведениот редослед:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \mathbf{R}(x, 90^0) \mathbf{R}(z, 90^0) \mathbf{Trans}(5, 0, 0) \mathbf{R}(o, 45^0) \mathbf{Trans}(0, 0, \sqrt{2}) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.168)
 \end{aligned}$$

б) Од (2.168) следува:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

Од друга страна:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{pr} \cdot \mathbf{R}_{ZYZ}(\phi, \theta, \psi) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\phi C\theta C\psi - S\phi S\psi & -C\phi C\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta & 0 \\ S\phi C\theta C\psi + C\phi S\psi & -S\phi C\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta & 0 \\ -S\theta C\psi & S\theta S\psi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta C\psi - S\phi S\psi & -C\phi C\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta & P_x \\ S\phi C\theta C\psi + C\phi S\psi & -S\phi C\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta & P_y \\ -S\theta C\psi & S\theta S\psi & C\theta & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.170)$$

па, бараните координати ќе бидат:

$$p_x = 0$$

$$p_y = -1$$

$$p_z = 6$$

$$\begin{cases} C\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \pm 45^\circ \Rightarrow S\theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ S\theta S\psi = 0 \Rightarrow S\psi = 0 (S\theta \neq 0) \Rightarrow \psi = 0^\circ, 180^\circ \Rightarrow C\psi = \pm 1 \end{cases} \quad (2.171)$$

$$-C\phi C\theta S\psi - S\phi C\psi = -1$$

$$C\phi C\theta S\psi + S\phi C\psi = 1$$

$$S\phi C\psi = 1$$

$$S\phi = \frac{1}{C\psi} = \pm 1 \Rightarrow \phi = 90^\circ, 270^\circ \quad (2.172)$$

2.39. Дадена е ротационата матрица \mathbf{R} . Да се определат XYZ Ојлеровите агли со помош на кои може да се постигне истата ориентација во просторот.

Решение: Со еквивалентирање на матриците \mathbf{R} и \mathbf{R}_{xyz} можат да се воочат следните релации:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{xyz} \quad (2.173)$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta C\psi & -C\theta S\psi & S\theta \\ C\varphi S\psi + S\varphi S\theta C\psi & C\varphi C\psi - S\varphi S\theta S\psi & -S\varphi C\theta \\ S\varphi S\psi - C\varphi S\theta C\psi & S\varphi C\psi + C\varphi S\theta S\psi & C\varphi C\theta \end{bmatrix} \quad (2.174)$$

$$\begin{cases} r_{23} = -S\varphi C\theta \\ r_{33} = C\varphi C\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{r_{23}}{r_{33}} = \frac{-S\varphi C\theta}{C\varphi C\theta} = \frac{-S\varphi}{C\varphi} = -\operatorname{tg}(\varphi) \Rightarrow \varphi = \operatorname{atan} 2(-r_{23}, r_{33}) \quad (2.175)$$

$$-S\varphi \cdot C\theta = r_{23} \Big/ \cdot (-S\varphi)$$

$$S^2\varphi \cdot C\theta = -r_{23} \cdot S\varphi$$

$$C\varphi \cdot C\theta = r_{33} \Big/ \cdot (C\varphi)$$

$$C^2\varphi \cdot C\theta = r_{33} \cdot C\varphi$$

$$S^2\varphi \cdot C\theta + C^2\varphi \cdot C\theta = -r_{23} \cdot S\varphi + r_{33} \cdot C\varphi$$

$$C\theta = -r_{23} \cdot S\varphi + r_{33} \cdot C\varphi$$

$$S\theta = r_{13}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{S\theta}{C\theta} = \frac{r_{13}}{-r_{23} \cdot S\varphi + r_{33} \cdot C\varphi} \Rightarrow \theta = \operatorname{atan} 2(r_{13}, -r_{23} \cdot S\varphi + r_{33} \cdot C\varphi) \quad (2.176)$$

$$\begin{cases} r_{11} = C\theta C\psi \\ r_{12} = -C\theta S\psi \end{cases} \Rightarrow \frac{r_{12}}{r_{11}} = \frac{-C\theta S\psi}{C\theta C\psi} = \frac{-S\psi}{C\psi} = -\operatorname{tg}(\psi) \Rightarrow \psi = \operatorname{atan} 2(-r_{12}, r_{11}) \quad (2.177)$$

Решението (2.175) - (2.177) важи само доколку $C\theta \neq 0$. За сингуларниот случај $C\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$, неможат да се определат аглите φ и ψ , одделно, туку само нивната линеарна комбинација $\psi \pm \varphi$. Имено, за $S\theta = 1$:

$$\begin{cases} r_{21} = C\varphi S\psi + S\varphi S\theta C\psi = C\varphi S\psi + S\varphi C\psi = S(\varphi + \psi) \\ r_{22} = C\varphi C\psi - S\varphi S\theta S\psi = C\varphi C\psi - S\varphi S\psi = C(\varphi + \psi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{r_{21}}{r_{22}} \Rightarrow (\varphi + \psi) = \operatorname{atan} 2(r_{21}, r_{22}) \quad (2.178)$$

Исто така:

$$\begin{cases} r_{31} = S\varphi S\psi - C\varphi S\theta C\psi = S\varphi S\psi - C\varphi C\psi = -C(\varphi + \psi) \\ r_{32} = S\varphi C\psi + C\varphi S\theta S\psi = S\varphi C\psi + C\varphi S\psi = S(\varphi + \psi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{r_{32}}{-r_{31}} \Rightarrow (\varphi + \psi) = \operatorname{atan} 2(r_{32}, -r_{31}) \quad (2.179)$$

Од друга страна, за $S\theta = -1$ следува:

$$\begin{cases} r_{21} = C\varphi S\psi + S\varphi S\theta C\psi = C\varphi S\psi - S\varphi C\psi = -S(\varphi - \psi) \\ r_{22} = C\varphi C\psi - S\varphi S\theta S\psi = C\varphi C\psi + S\varphi S\psi = C(\varphi - \psi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{-r_{21}}{r_{22}} \Rightarrow (\varphi - \psi) = \operatorname{atan} 2(-r_{21}, r_{22}) \quad (2.180)$$

Исто така:

$$\begin{cases} r_{31} = S\varphi S\psi - C\varphi S\theta C\psi = C\varphi C\psi + S\varphi S\psi = C(\varphi - \psi) \\ r_{32} = S\varphi C\psi + C\varphi S\theta S\psi = S\varphi C\psi - C\varphi S\psi = S(\varphi - \psi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{r_{31}}{r_{32}} \Rightarrow (\varphi - \psi) = \operatorname{atan} 2(r_{31}, r_{32}) \quad (2.181)$$

2.40. Дадена е ротационата матрица \mathbf{R} . Да се определат XYZ Ојлеровите агли со помош на кои може да се постигне истата ориентација во просторот.

Решение: Со еквивалентирање на матриците \mathbf{R} и \mathbf{R}_{xzy} можат да се воочат следните релации:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{xzy} \quad (2.182)$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta C\psi & -S\theta & C\theta S\psi \\ S\varphi S\psi + C\varphi S\theta C\psi & C\varphi C\theta & -S\varphi C\psi + C\varphi S\theta S\psi \\ -C\varphi S\psi + S\varphi S\theta C\psi & S\varphi C\theta & C\varphi C\psi + S\varphi S\theta S\psi \end{bmatrix} \quad (2.183)$$

$$\begin{cases} r_{22} = C\varphi C\theta \\ r_{32} = S\varphi C\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{r_{32}}{r_{22}} = \frac{S\varphi C\theta}{C\varphi C\theta} = \frac{S\varphi}{C\varphi} = \operatorname{tg}(\varphi) \Rightarrow \varphi = \operatorname{atan} 2(r_{32}, r_{22}) \quad (2.184)$$

$$C\varphi \cdot C\theta = r_{22} \quad / \cdot (C\varphi)$$

$$C^2\varphi \cdot C\theta = r_{22} \cdot C\varphi$$

$$S\varphi \cdot C\theta = r_{32} \quad / \cdot (S\varphi)$$

$$S^2\varphi \cdot C\theta = r_{32} \cdot S\varphi$$

$$S^2\varphi \cdot C\theta + C^2\varphi \cdot C\theta = r_{32} \cdot S\varphi + r_{22} \cdot C\varphi$$

$$C\theta = r_{32} \cdot S\varphi + r_{22} \cdot C\varphi$$

$$S\theta = -r_{12}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{S\theta}{C\theta} = \frac{-r_{12}}{r_{32} \cdot S\varphi + r_{22} \cdot C\varphi} \Rightarrow \theta = \operatorname{atan} 2(-r_{12}, r_{32} \cdot S\varphi + r_{22} \cdot C\varphi) \quad (2.185)$$

$$\begin{cases} r_{11} = C\theta C\psi \\ r_{13} = C\theta S\psi \end{cases} \Rightarrow \frac{r_{13}}{r_{11}} = \frac{C\theta S\psi}{C\theta C\psi} = \frac{S\psi}{C\psi} = \operatorname{tg}(\psi) \Rightarrow \psi = \operatorname{atan} 2(r_{13}, r_{11}) \quad (2.186)$$

Решението (2.184) - (2.186) важи само доколку $C\theta \neq 0$. За сингуларниот случај $C\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$, не можат да се определат аглиите φ и ψ , одделно, туку само нивната линеарна комбинација $\psi \pm \varphi$. Имено, за $S\theta = 1$:

$$\begin{cases} r_{21} = S\varphi S\psi + C\varphi S\theta C\psi = S\varphi S\psi + C\varphi C\psi = C(\varphi - \psi) \\ r_{31} = -C\varphi S\psi + S\varphi S\theta C\psi = -C\varphi S\psi + S\varphi C\psi = S(\varphi - \psi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{r_{31}}{r_{21}} \Rightarrow (\varphi - \psi) = \operatorname{atan} 2(r_{31}, r_{21}) \quad (2.187)$$

Исто така:

$$\begin{cases} r_{23} = -S\varphi C\psi + C\varphi S\theta S\psi = -S\varphi C\psi + C\varphi S\psi = -S(\varphi - \psi) \\ r_{33} = C\varphi C\psi + S\varphi S\theta S\psi = C\varphi C\psi + S\varphi S\psi = C(\varphi - \psi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{-r_{23}}{r_{33}} \Rightarrow (\varphi - \psi) = \operatorname{atan} 2(-r_{23}, r_{33}) \quad (2.188)$$

Од друга страна, за $S\theta = -1$ следува:

$$\begin{cases} r_{21} = S\varphi S\psi + C\varphi S\theta C\psi = S\varphi S\psi - C\varphi C\psi = -C(\varphi + \psi) \\ r_{31} = -C\varphi S\psi + S\varphi S\theta C\psi = -S\varphi C\psi - C\varphi S\psi = -S(\varphi + \psi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{-r_{31}}{-r_{21}} \Rightarrow (\varphi + \psi) = \operatorname{atan} 2(-r_{31}, -r_{21}) \quad (2.189)$$

Исто така:

$$\begin{cases} r_{23} = -S\varphi C\psi + C\varphi S\theta S\psi = -S\varphi C\psi - C\varphi S\psi = -S(\varphi + \psi) \\ r_{33} = C\varphi C\psi + S\varphi S\theta S\psi = C\varphi C\psi - S\varphi S\psi = C(\varphi + \psi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{-r_{23}}{r_{33}} \Rightarrow (\varphi + \psi) = \operatorname{atan} 2(-r_{23}, r_{33}) \quad (2.190)$$

2.41. Да се определат RPY аглиите со помош на кои може да се оствари дадена ориентација во просторот.

Решение: Ротационата матрица $\mathbf{R}_{RPY}(\varphi, \vartheta, \eta)$, која ја дефинира ориентацијата со помош на RPY агли е следната:

$$\mathbf{R}_{RPY}(\varphi, \vartheta, \eta) = \mathbf{R}(a, \varphi) \times \mathbf{R}(o, \vartheta) \times \mathbf{R}(n, \eta) =$$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\vartheta & C\varphi \cdot S\vartheta \cdot S\eta - S\varphi \cdot C\eta & C\varphi \cdot S\vartheta \cdot C\eta + S\varphi \cdot S\eta \\ S\varphi \cdot C\vartheta & S\varphi \cdot S\vartheta \cdot S\eta + C\varphi \cdot C\eta & S\varphi \cdot S\vartheta \cdot C\eta - C\varphi \cdot S\eta \\ -S\vartheta & C\vartheta \cdot S\eta & C\vartheta \cdot C\eta \end{bmatrix} \quad (2.191)$$

па, ако е позната ориентацијата $\mathbf{R}_{RPY}(\varphi, \vartheta, \eta)$, соодветните RPY агли можат да се пресметаат на следниот начин. Ако $r_{31} \neq \pm 1$:

$$S\vartheta = -r_{31}, \quad C\vartheta = \pm \sqrt{1 - r_{31}^2} \quad (2.192)$$

$$\vartheta_1 = a \tan 2\left(-r_{31}, \sqrt{1-r_{31}^2}\right), \quad (2.193)$$

$$\vartheta_{21} = a \tan 2\left(-r_{31}, -\sqrt{1-r_{31}^2}\right)$$

$$C\varphi C\vartheta = r_{11}, \quad S\varphi C\vartheta = r_{21}$$

$$\varphi = a \tan 2(r_{21}, r_{11}) \quad (2.194)$$

$$C\vartheta S\eta = r_{32}, \quad C\vartheta C\eta = r_{33}$$

$$\eta = a \tan 2(r_{32}, r_{33}) \quad (2.195)$$

Ако $r_{31} = 1$, тоа значи дека $C\vartheta = 0$, па матрицата $\mathbf{R}_{RPY}(\varphi, \vartheta, \eta)$ може да се упрости на следниот начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{RPY}(\varphi, \vartheta, \eta) &= \mathbf{R}(a, \varphi) \times \mathbf{R}(o, \vartheta) \times \mathbf{R}(n, \eta) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -C\varphi \cdot S\eta - S\varphi \cdot C\eta & -C\varphi C\eta + S\varphi \cdot S\eta \\ 0 & -S\varphi \cdot S\eta + C\varphi \cdot C\eta & -S\varphi \cdot C\eta - C\varphi \cdot S\eta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -S(\varphi + \eta) & -C(\varphi + \eta) \\ 0 & C(\varphi + \eta) & -S(\varphi + \eta) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.196)$$

од каде се гледа дека може да се определи само сумата $\varphi + \eta$, што значи дека инверзната кинематска задача има бесконечно решенија.

2.42. Подвижниот координатен систем ${}^U\mathbf{B} = (\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a})$ е подложен на следните последователни трансформации во наведениот редослед:

- translација долж n -оската за 5 единици
- ротација околу o -оската за агол од 60^0
- ротација околу z -оската за агол од 30^0
- translација долж a -оската за 3 единици
- ротација околу x -оската за агол од 45^0

а) Да се определи вкупната трансформација на набљудуваниот координатен систем.

б) Да се определат потребните движења (транслаторни и ротациони) за да се постигне истата положба и ориентација на набљудуваниот координатен систем ако се користи Cartesian – RPY конфигурација.

Решение: а) Вкупната трансформација на подвижниот координатен систем ${}^U\mathbf{B} = (\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a})$ е претставена со следниот производ:

$$\mathbf{R}(x, 45^0) \times \mathbf{R}(z, 30^0) \times \mathbf{Trans}(5, 0, 0) \times \mathbf{R}(o, 60^0) \times \mathbf{Trans}(0, 0, 3) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8660 & -0.5000 & 0 & 0 \\ 0.3536 & 0.6124 & -0.7071 & 0 \\ 0.3536 & 0.6124 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8660 & -0.5000 & 0 & 4.3301 \\ 0.3536 & 0.6124 & -0.7071 & 1.7678 \\ 0.3536 & 0.6124 & 0.7071 & 1.7678 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4330 & -0.5000 & 0.7500 & 4.3301 \\ 0.7891 & 0.6124 & -0.0474 & 1.7678 \\ -0.4356 & 0.6124 & 0.6597 & 1.7678 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4330 & -0.5000 & 0.7500 & 6.8801 \\ 0.7891 & 0.6124 & -0.0474 & 1.6257 \\ -0.4356 & 0.6124 & 0.6597 & 3.7470 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (2.197)
 \end{aligned}$$

б)

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4330 & -0.5000 & 0.7500 & 6.8801 \\ 0.7891 & 0.6124 & -0.0474 & 1.6257 \\ -0.4356 & 0.6124 & 0.6597 & 3.7470 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (2.198)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{n_y}{n_x} = \operatorname{arctg} \frac{0.7891}{0.4330} = 61.24^0 \quad (2.199)$$

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= \operatorname{arctg} \frac{-n_z}{n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi} = \\
 &= \operatorname{arctg} \frac{0.4356}{0.4330(0.4811) + 0.7891(0.8767)} = 27.72^0 \quad (2.200)
 \end{aligned}$$

$$\eta = \operatorname{arctg} \frac{-a_y \cos \varphi + a_x \sin \varphi}{o_y \cos \varphi - o_x \sin \varphi} = \operatorname{arctg} \frac{0.0474(0.4811) + 0.7500(0.8767)}{0.6124(0.4811) + 0.5000(0.8767)} = 53.2^0 \quad (2.201)$$

$$p_x = 6.8801, p_y = 1.6257, p_z = 3.7470 \quad (2.202)$$

2.43. Нека, под претпоставка, една роботска рака најнапред е доведена во саканата позиција во просторот, а потоа е одредена и нејзината ориентација во просторот, при што позицијата на роботската рака во просторот е дадена во правоаголни координати, а нејзината ориентација во просторот е одредена со RPY аглите. Резултантното движење е дефинирано со матрицата:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.527 & -0.574 & 0.628 & 4 \\ 0.369 & 0.189 & 0.439 & 6 \\ -0.766 & 0 & 0.643 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

Да се определат RPY аглите со кои се постига зададената ориентација на роботската рака во просторот.

Решение:

$$\varphi = \arctg \frac{n_y}{n_x} = \arctg \frac{0.369}{0.527} = \begin{cases} 35^0 \\ 215^0 \end{cases} \quad (2.204)$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arctg \frac{-n_z}{n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi} = \\ &= \arctg \frac{0.766}{0.527(0.8192) + 0.369(0.5736)} = \begin{cases} 68.22^0 \\ 248.22^0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.205)$$

$$\eta = \arctg \frac{-a_y \cos \varphi + a_x \sin \varphi}{o_y \cos \varphi - o_x \sin \varphi} = \arctg \frac{-0.439(0.82) + 0.628(0.5736)}{0.189(0.82) + 0.574(0.5736)} = \begin{cases} 0^0 \\ 180^0 \end{cases} \quad (2.206)$$

2.44. Да се определат Ојлеровите агли со кои се постига ориентацијата на една роботска рака дефинирана со матрицата \mathbf{T} од претходната задача. (Задачата 2.43 да се реши за правоаголни координати и Ојлерови агли).

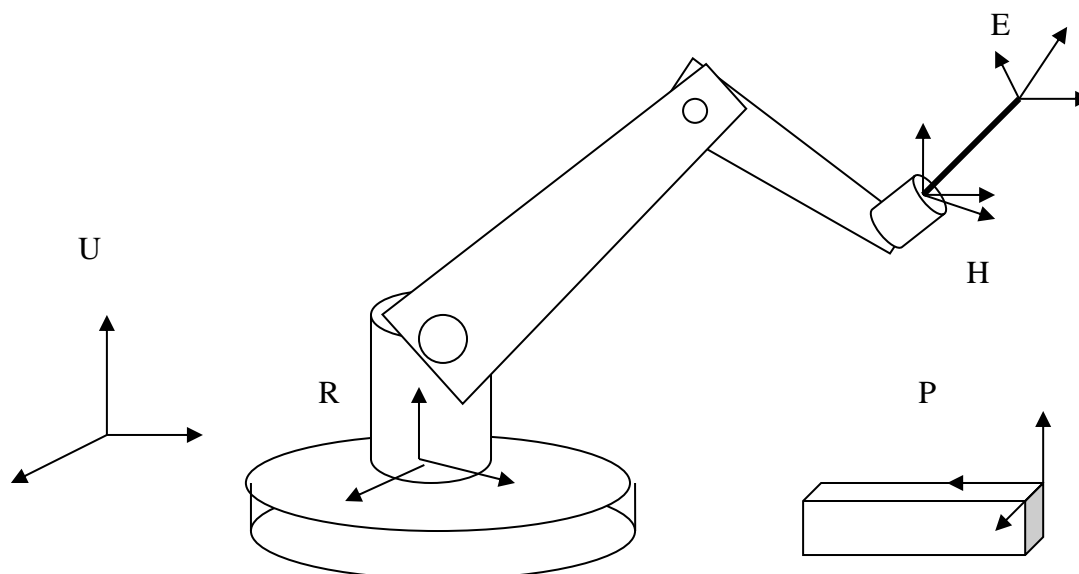
Решение:

$$\varphi = \arctg \frac{a_y}{a_x} = \arctg \left(\frac{0.439}{0.628} \right) = \begin{cases} 35^0 \\ 215^0 \end{cases} \quad (2.207)$$

$$\theta = \arctg \frac{a_x C\varphi + a_y S\varphi}{a_z} = \begin{cases} 37^0 \\ 217^0 \end{cases} \quad (2.208)$$

$$\psi = \arctg \frac{-n_x S\varphi + n_y C\varphi}{-o_x S\varphi + o_y C\varphi} = \begin{cases} 0^0 \\ 180^0 \end{cases} \quad (2.209)$$

2.45. Дадени се координатните системи придружени со основата на еден робот и конкретен објект, прикажани на Слика 2.17, во однос на референтен координатен систем U .



Слика 2.17. Илустрација кон Задача 2.45

- а) Да се определи трансформацијата $\mathbf{R}_{\mathbf{T}_H}$ за дадената роботска конфигурација ако последниот зглоб од роботската рака треба да се постави врз објектот.
- б) Со проверка да се утврди дали роботот може да биде сферен (2RP) робот и, ако е така, да се определат вредностите α, β, r .
- в) Под претпоставка дека набљудуваниот робот е робот со правоаголни и RPY координати, да се определат вредностите $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$.

$$\mathbf{U}_{\mathbf{T}_P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{U}_{\mathbf{T}_P})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.210)$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{T}_R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{U}_{\mathbf{T}_R})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.211)$$

Решение: а)

$$(\mathbf{U}_{\mathbf{T}_H}) = (\mathbf{U}_{\mathbf{T}_R})(\mathbf{R}_{\mathbf{T}_H}) = (\mathbf{U}_{\mathbf{T}_P})(\mathbf{P}_{\mathbf{T}_H}) \quad (2.212)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{\mathbf{T}_H}) &= (\mathbf{U}_{\mathbf{T}_R})^{-1}(\mathbf{U}_{\mathbf{T}_P})(\mathbf{P}_{\mathbf{T}_H}) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.213)$$

б) Не.

$$\mathbf{T}_{sph} = \begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & S\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C\beta \cdot S\gamma & C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.214)$$

в)

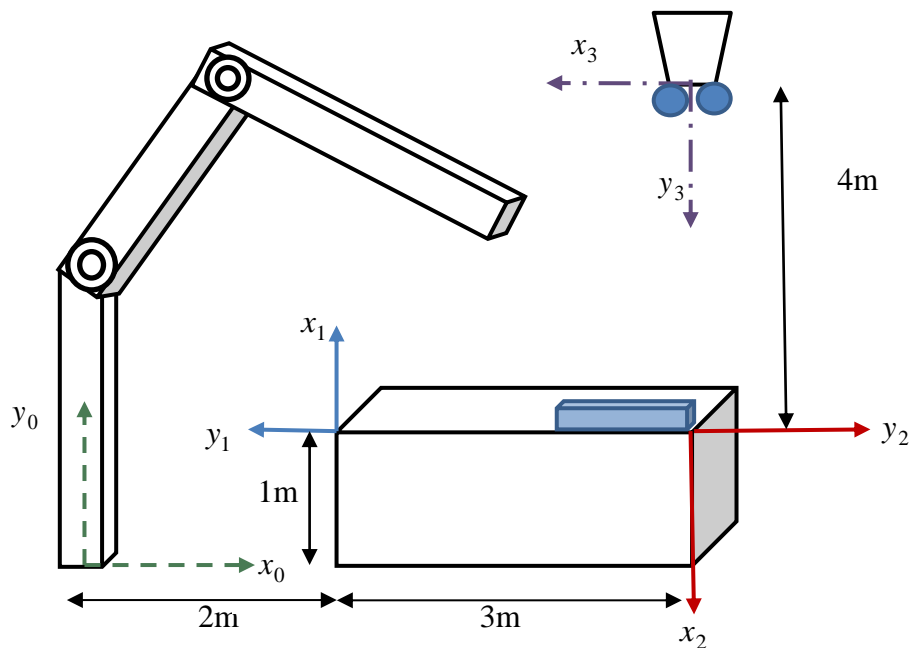
$$\psi = \arctg \frac{n_y}{n_x} = \arctg(-\infty) \Rightarrow \psi = -90^0 \quad (2.215)$$

$$\theta = \arctg \frac{-n_z}{n_x C\psi + n_y S\psi} = \arctg \frac{n_x}{n_y} = \arctg 0 \Rightarrow \theta = \begin{cases} 0^0 \\ 180^0 \end{cases} \quad (2.216)$$

$$\varphi = \arctg \frac{-a_y C\psi + a_x S\psi}{o_y C\psi - o_x S\psi} = \arctg(-\infty) \Rightarrow \varphi = -90^0 \quad (2.217)$$

$$x = 5, y = 1, z = 0 \quad (2.218)$$

2.46. Само со набљудување, да се определат ориентациите ${}^0\mathbf{R}_1$, ${}^1\mathbf{R}_2$, ${}^2\mathbf{R}_3$ и ${}^0\mathbf{R}_3$ на локалните координатни системи $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$ прикажани на Слика 2.18. Добиениот резултат за ${}^0\mathbf{R}_3$ да се провери со множење на матриците ${}^0\mathbf{R}_1$, ${}^1\mathbf{R}_2$ и ${}^2\mathbf{R}_3$.



Слика 2.18. Илустрација кон Задачата 2.46

Решение:

$${}^0\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(z, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.219)$$

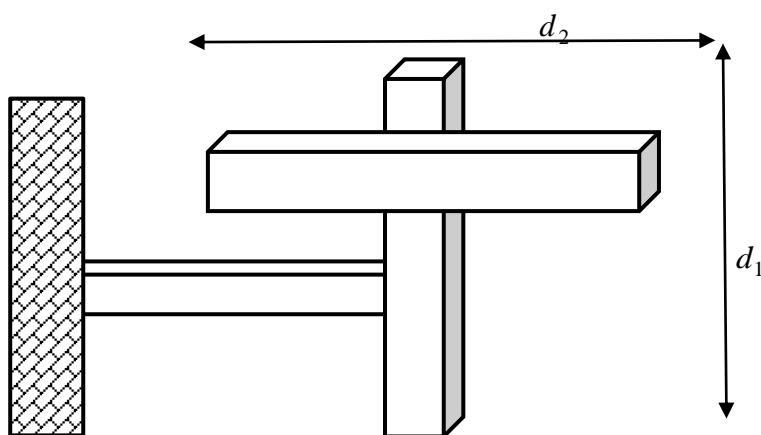
$${}^1\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}(z, 180^\circ) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.220)$$

$${}^2\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}(z, -90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.221)$$

$${}^0\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}(z, 180^\circ) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.222)$$

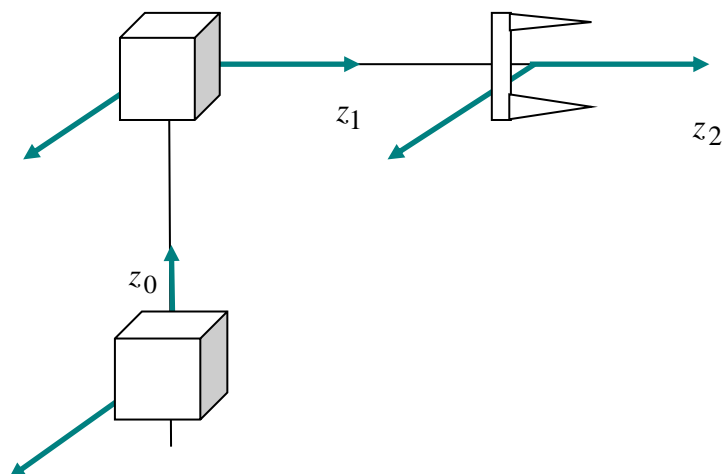
$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{R}_3 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\mathbf{R}_2 \cdot {}^2\mathbf{R}_3 \end{aligned} \quad (2.223)$$

2.47. Да се состави D-H модел на директната кинематика на роботската рака од Слика 2.19.



Слика 2.19. Картезиен робот со два степени слобода на движење

Решение: D-H моделот на дадената роботска рака е прикажан на Слика 2.20.



Слика 2.20. D-H модел на роботската рака од Слика 2.19

Табела 2.1. D-H параметри на роботската рака од Слика 2.20

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0^0	d_1	0	-90^0
2	0^0	d_2	0	0^0

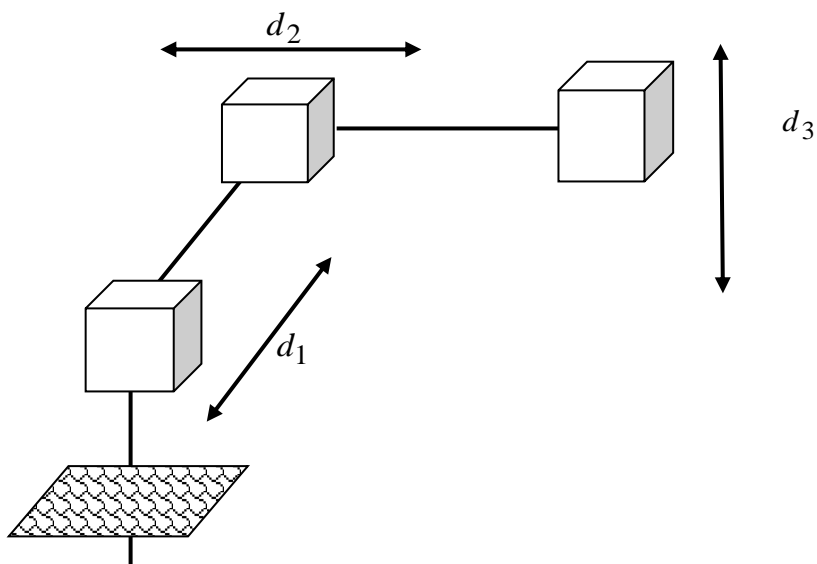
Бараниот модел на директната кинематика на роботската рака е:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.224)$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.225)$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.226)$$

2.48. Да се определи Denavit – Hartenberg моделот на роботската рака со три степени слобода на движење, прикажана на Слика 2.21.

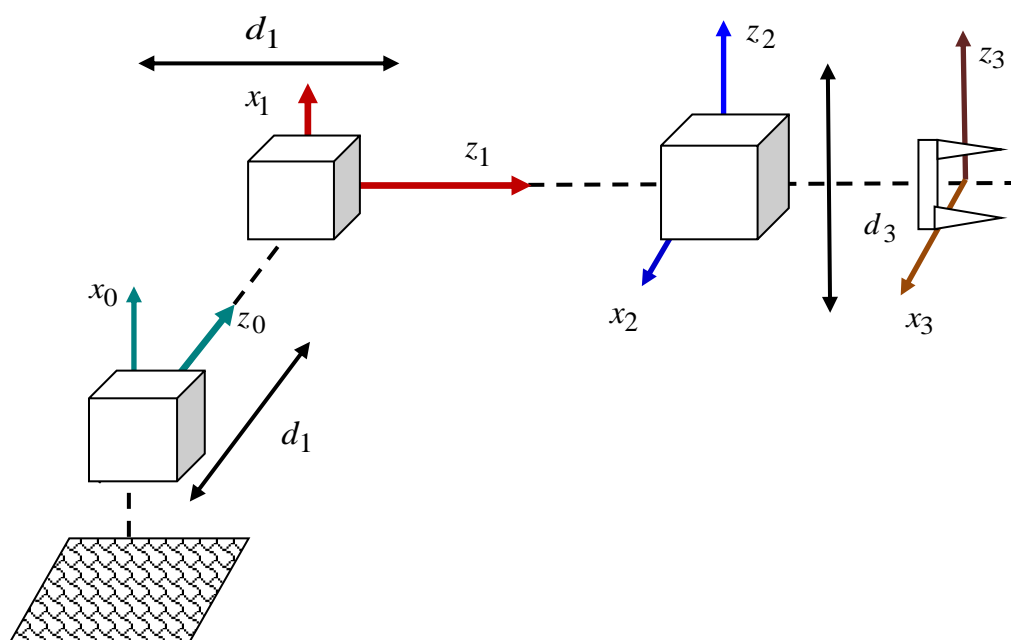


Слика 2.21. Роботска рака со три транслаторни зглоба

Решение: Координатните системи што се придружени кон зададената роботска рака во согласност со D-H конвенцијата се прикажани на Слика 2.22. Оттука следуваат D-H параметрите дадени во Табела 2.2.

Табела 2.2. D-H параметри на роботската рака од Слика 2.22

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0^0	d_1	0	-90^0
2	90^0	d_2	0	90^0
3	0^0	d_3	0	0^0



Слика 2.22. D-H модел на роботската рака од Слика 2.21

Врз основа на параметрите од Табела 2.2 се пресметуваат матриците \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 и \mathbf{A}_3 , кои ги претставуваат трансформациите на одделените координатни системи ${}^0\mathbf{T}_1$, ${}^1\mathbf{T}_2$ и ${}^2\mathbf{T}_3$:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.227)$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.228)$$

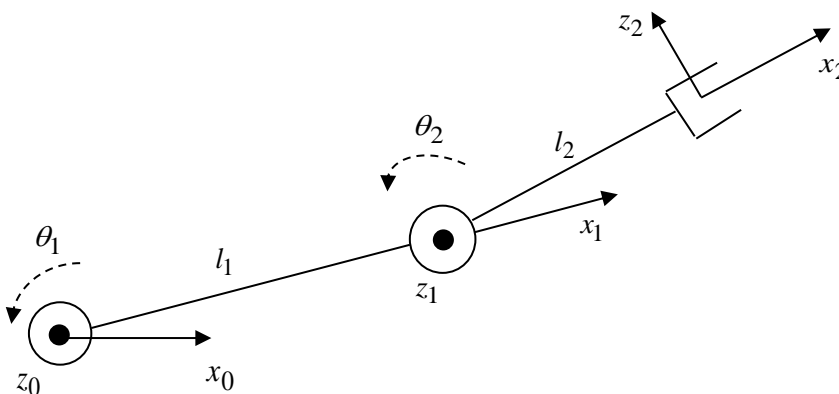
$${}^2\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.229)$$

Положбата на набљудуваната роботска рака во просторот е претставена со трансформацијата:

$${}^0\mathbf{T}_3 = ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.230)$$

2.49. Да се определи Denavit – Hartenberg моделот на рамнинска роботска рака со два степени слобода на движење, прикажана на Слика 2.23.



Слика 2.23. RR роботска рака од Задача 2.49

Решение: Роботската рака од Слика 2.23 се состои од два ротациони зглоба, означени со зглоб 1 и зглоб 2, и два крака со должини l_1 и l_2 , соодветно. Бидејќи зглобовите се ротациони, нивните променливи ќе претставуваат агли на ротација и се означени со θ_1 и θ_2 , соодветно. Кон секој зглоб од раката е придружен локален координатен систем. Така, кон првиот зглоб од раката е придружен координатниот систем $\{0\} = \{x_0, y_0, z_0\}$, кон вториот зглоб е придружен координатниот систем $\{1\} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и кон извршниот елемент од роботската рака е придружен координатниот систем $\{2\} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Оските z_0 и x_0 се поставени според правилото на десната рака во правецот на оската на ротација на зглобовите, додека оската z_2 е избрана произволно. Оските x_1 и x_2 се поставени во правец на нормалата на соодветните соседни z – оски, додека оската x_0 е избрана произволно. (Оските што можат да се постават произволно обично се избираат така да се упростат математичките пресметки и записи.) За вака избрани локални координатни системи, D-H параметрите на дадената роботска рака ќе бидат:

Табела 2.3. D-H параметри на роботската рака од Слика 2.23

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	0^0
2	θ_2	0	l_2	-90^0

Со помош на параметрите од горната таблица се пресметуваат соодветните матрици \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 на дадената роботска рака:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.231}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & l_2 C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_2 S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.232}
 \end{aligned}$$

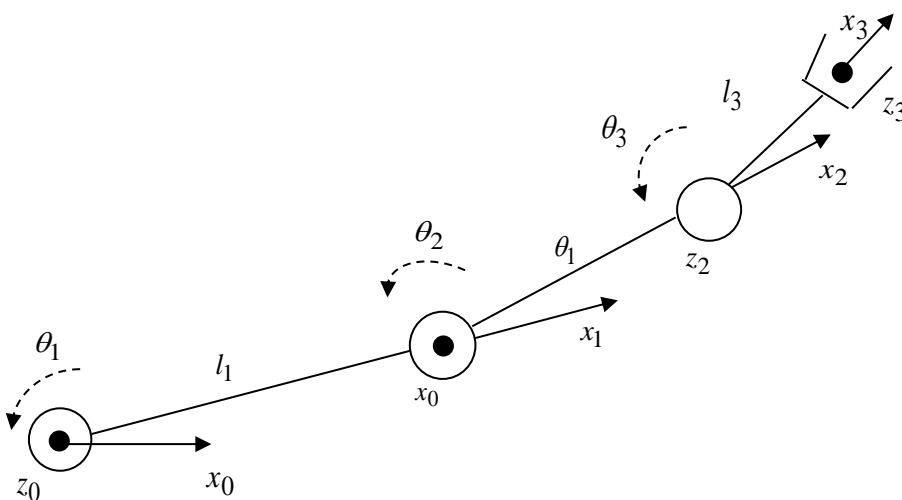
па, бараниот модел на раката ќе биде даден со трансформационата матрица:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_2 &= ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & l_2 C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_2 S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_{12} & 0 & -S_{12} & l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ S_{12} & 0 & C_{12} & l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.233)
 \end{aligned}$$

која ја моделира нејзината директна кинематика.

2.50. Да се определи Denavit – Hartenberg моделот на рамнинска роботска рака со три степени слобода на движење, прикажана на Слика 2.24.

Решение: Роботската рака од Слика 2.24 се состои од три ротациони зглоба, и три крака со должини l_1 , l_2 и l_3 , соодветно. Променливи на зглобовите се ротационите агли θ_1 , θ_2 и θ_3 , соодветно. Кон првиот зглоб од раката е придружен координатен систем $\{0\} = \{x_0, y_0, z_0\}$, кон вториот зглоб е придружен координатен систем $\{1\} = \{x_1, y_1, z_1\}$, кон третиот зглоб е придружен координатен систем $\{2\} = \{x_2, y_2, z_2\}$ и кон извршниот елемент од роботската рака е придружен координатен систем $\{3\} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Оските z_0 , z_1 и z_2 се поставени според правилото на десната рака во правецот на оската на ротација на зглобовите, додека оската z_3 е избрана произволно. Оските x_1 , x_2 и x_3 се поставени во правец на нормалата на соодветните соседни z -оски, додека оската x_0 е избрана произволно. (Оските што можат да се постават произволно обично се избираат така да се упростат математичките пресметки и записи.) За вака избрани локални координатни системи, D-H параметрите на дадената роботска рака ќе бидат како во Табела 2.4.



Слика 2.24. RRR роботска рака од Задача 2.50

Табела 2.4. D-H параметри на роботската рака од Слика 2.24

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	0^0
2	θ_2	0	l_2	0^0
3	θ_3	0	l_3	0^0

Со помош на параметрите од горната таблица се пресметуваат соодветните матрици \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 и \mathbf{A}_3 на дадената роботска рака:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.234)$$

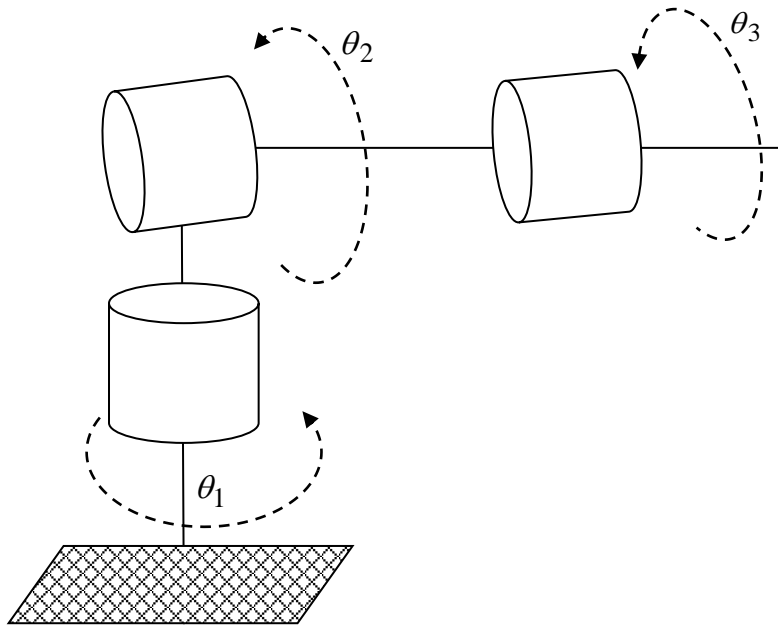
$${}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.235)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.236)$$

па, бараниот модел на раката ќе биде даден со трансформационата матрица:

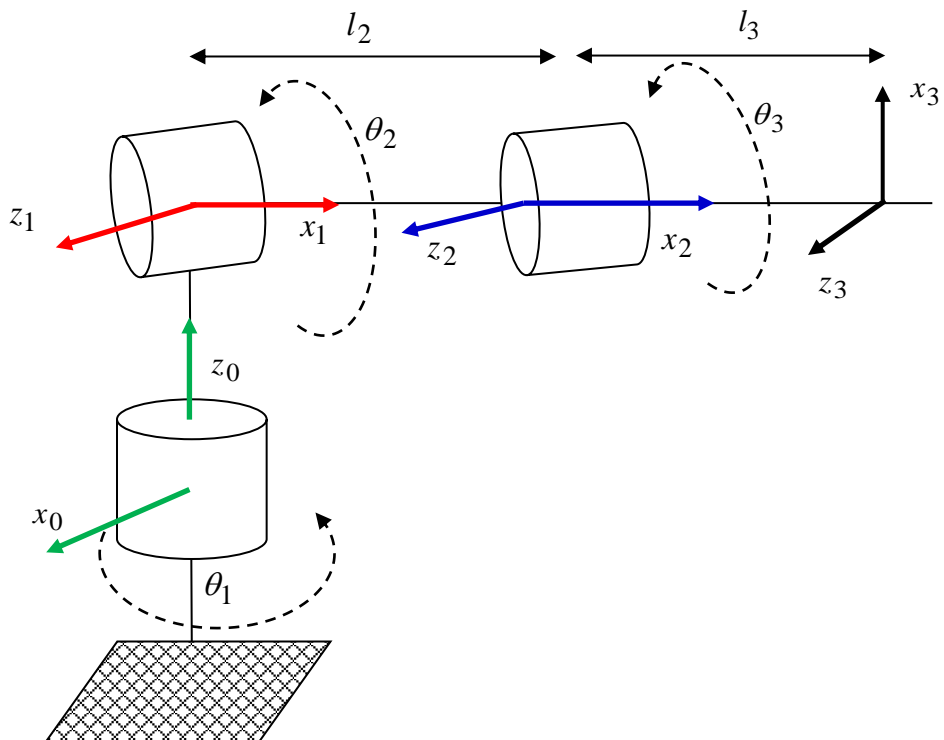
$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_3 &= ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.237) \end{aligned}$$

2.51. Да се состави D-H модел на директната кинематика на просторната роботска рака од Слика 2.25. Таа се состои од три ротациони зглоба, дефинирани со оските на ротација z_0 , z_1 и z_2 , при што последните две оски се нормални на рамнината на сликата и се паралелни една на друга.



Слика 2.25. Роботска рака со три ротациони зглоба

Решение:



Слика 2.26. D-H модел на роботската рака од Слика 2.25

Табела 2.5. D-H параметри на роботската рака од Слика 2.26

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	0	90^0
2	θ_2	0	l_2	0^0
3	θ_3	0	l_3	0^0

Со помош на параметрите од горната таблица се пресметуваат соодветните матрици \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 и \mathbf{A}_3 на дадената роботска рака:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.238)$$

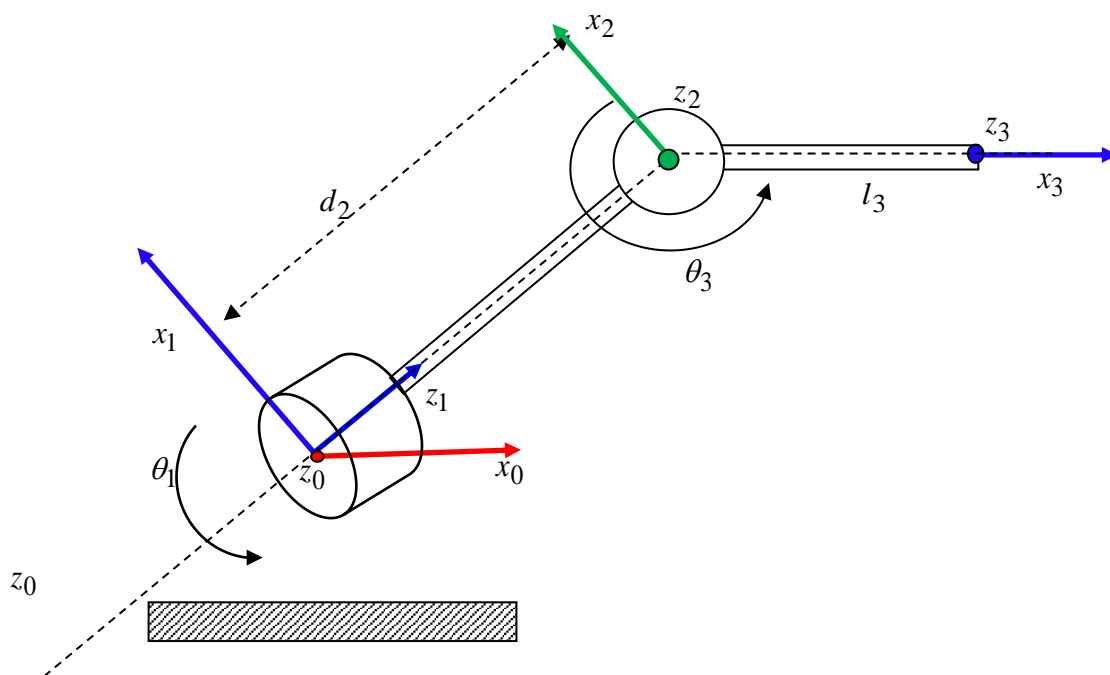
$${}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.239)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.240)$$

па, бараниот модел на раката ќе биде даден со трансформационата матрица:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_3 &= ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & l_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_{23} \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_{23} \\ S_{23} & C_{23} & 0 & l_2 S_2 + l_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.241) \end{aligned}$$

2.52. Дадена е роботската рака од Слика 2.27. Да се усвои дека оската x_0 е насочена во десно, z – оската на извршниот елемент на раката има иста насока како и последниот зглоб, а неговата x – оската е насочена во десно. Раката се состои од два ротациони зглоба и еден трансляторен зглоб.



Слика 2.27. Илустрација кон Задача 2.52

Да се определат D-H параметрите на раката. Да се пресметаат сите матрици \mathbf{A}_i , како и матрицата на директната кинематика на раката ${}^0\mathbf{T}_n$. За генерализирани променливи на моделот на раката да се усвојат аглиите θ_1 и θ_3 и растојанието d_2 .

Решение: D-H параметрите на набљудуваната роботска рака се дадени во долната таблица.

Табела 2.6.D-H параметри на роботската рака од Слика 2.27

i	θ	d	a	α
1	θ_1	0	0	90^0
2	0	d_2	0	-90^0
3	θ_3	0	l_3	0^0

Оттука, за одделните трансформации $\{0\} \rightarrow \{1\}$, $\{1\} \rightarrow \{2\}$ и $\{2\} \rightarrow \{3\}$ се добива:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.242)$$

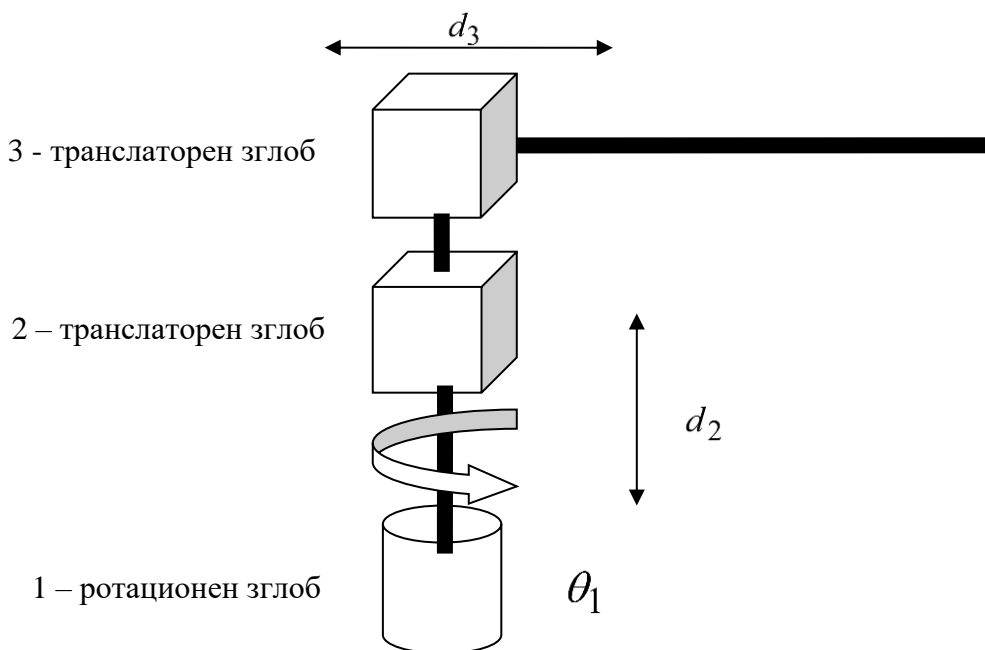
$${}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.243)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.244)$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_{13} & -S_{13} & 0 & l_3 C_{13} + d_2 S_1 \\ S_{13} & C_{13} & 0 & l_3 S_{13} - d_2 C_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.245)$$

Матрицата ${}^0\mathbf{T}_3$ претставува решение на задачата на директната кинематика за дадената роботска рака, што значи ја дефинира просторната положба на раката во функција од променливите на зглобовите на раката.

2.53. На Слика 2.28 е прикажан симболично цилиндричен робот со три зглоба – еден ротационен и два транслаторни (R2P конфигурација).



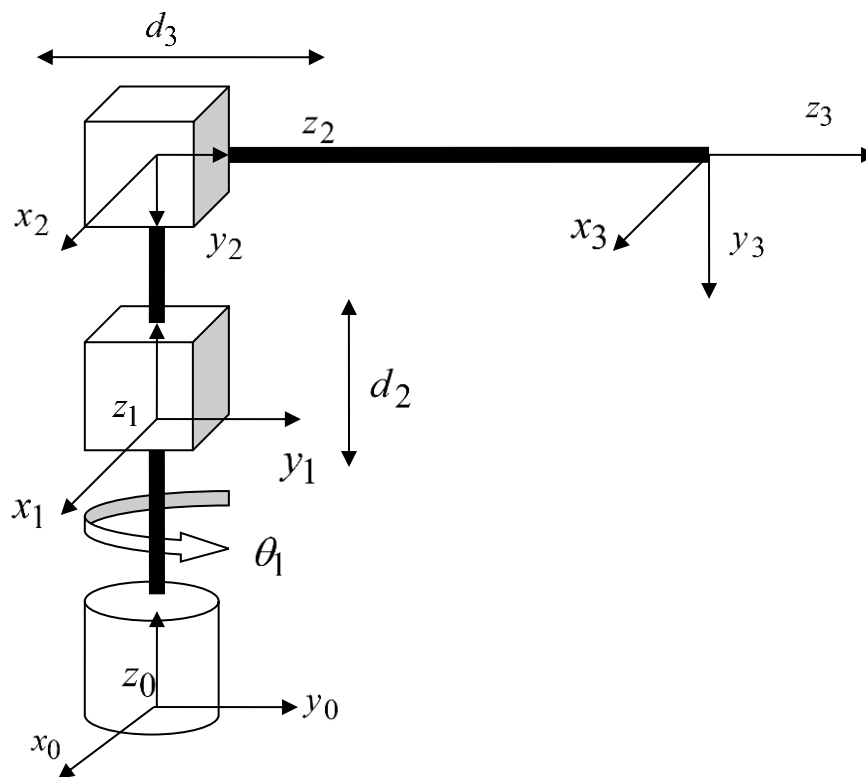
Слика 2.28. Илустрација кон Задача 2.53

Да се определи неговиот D–H модел ${}^0\mathbf{T}_3$. Зглобовите на дадената роботска рака се означени со зглоб 1, зглоб 2 и зглоб 3, соодветно. Со зглобот 1 е придружен координатниот систем $\{0\} = \mathbf{F}_0(o_0, x_0, y_0, z_0)$, со зглобот 2 е придружен

координатниот систем $\{1\} = \mathbf{F}_1(o_1, x_1, y_1, z_1)$ и со зглобот 3 е придружен координатниот систем $\{2\} = \mathbf{F}_2(o_2, x_2, y_2, z_2)$. Со извршниот елемент е придружен координатниот систем $\{3\} = \mathbf{F}_3(o_3, x_3, y_3, z_3)$,

Решение: Како што е покажано на Слика 2.29, оската z_0 се поставува според правилото на десната рака, додека оските z_1 и z_2 се поставени во правецот на движење на соодветните транслаторни зглобови. Правецот на x_0 е произволен, а координатниот почеток o_0 може да биде поставен произволно долж z_0 -оската. (На Слика 2.29 o_0 е поставен сосема природно, меѓутоа исто така може да се постави и кај зглобот 2). Оските z_0 и z_1 се поклопуваат и координатниот почеток o_1 е поставен кај зглобот 2, додека оската x_1 е паралелна со оската x_0 за $\theta_1 = 0$. Оските z_2 и z_1 се сечат и координатниот почеток o_2 е сместен во нивниот пресек. Оската x_2 е одбрана паралелно со x_1 . Конечно, координатниот систем $\{3\}$ е поставен на крајот од роботската рака, каде што се приклучува извршниот елемент.

D – H параметрите на роботската рака од Слика 2.29 се дадени во Табела 2.7. Со * се означени променливите на зглобовите. Сите други параметри во Табела 2.7 се константи.



Слика 2.29. Придружување координатни системи кон раката од Слика 2.28

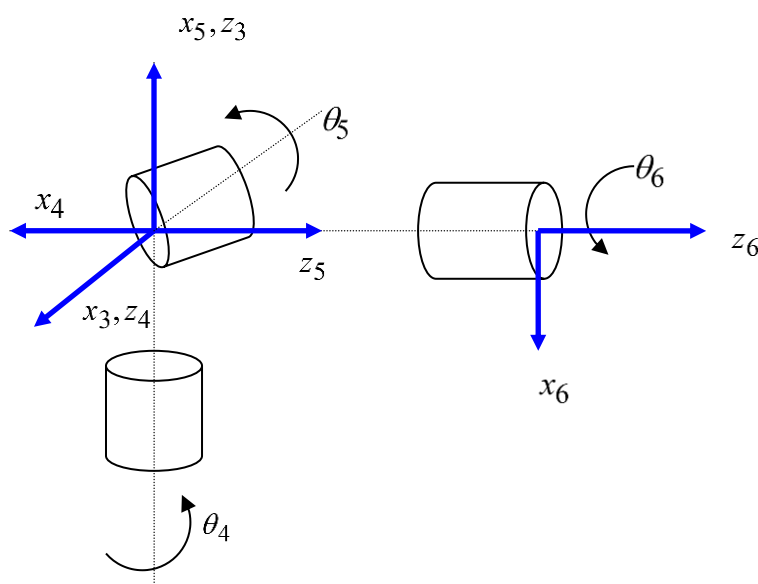
Табела 2.7. D–H параметри на роботската рака од Слика 2.29

Крак	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	d_1	0	0
2	0	d_2^*	0	-90^0
3	0	d_3^*	0	0

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.246)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & -S_1 d_3 \\ S_1 & 0 & C_1 & C_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.247)$$

2.54. Да се определат D–H параметрите за сферниот механизам од Слика 2.30. (Механизмот го претставува зглобот на шаката кај Стенфордската роботска рака).



Слика 2.30. Илустрација на Задача 2.54 – сферен механизам

Решение: Кај сферниот механизам од Слика 2.54, оските z_3 , z_4 и z_5 се сечат во една точка. Неговите D – H параметри се дадени во Табела 2.8. Со * се означени променливите на зглобовите. Сите други параметри во таблицата се константи.

Табела 2.8. D – H параметри на сферниот механизам од Слика 2.30

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_4^*	0	0	-90^0
2	θ_5^*	0	0	90^0
3	θ_6^*	d_6	0	0

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.248)$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.249)$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.250)$$

$${}^3\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 & C_4S_5d_6 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 & S_4S_5d_6 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & C_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.251)$$

Ако се погледне ротациониот дел од трансформационата матрица ${}^3\mathbf{T}_6$, може да се забележи дека има ист облик како и матрицата $\mathbf{R}_{\text{ZYZ}}(\phi, \theta, \psi)$. Следствено, θ_4 , θ_5 и θ_6 се ZYZ Ојлерови агли во однос на координатниот систем $\{3\} = \mathbf{F}_3(o_3, x_3, y_3, z_3)$.

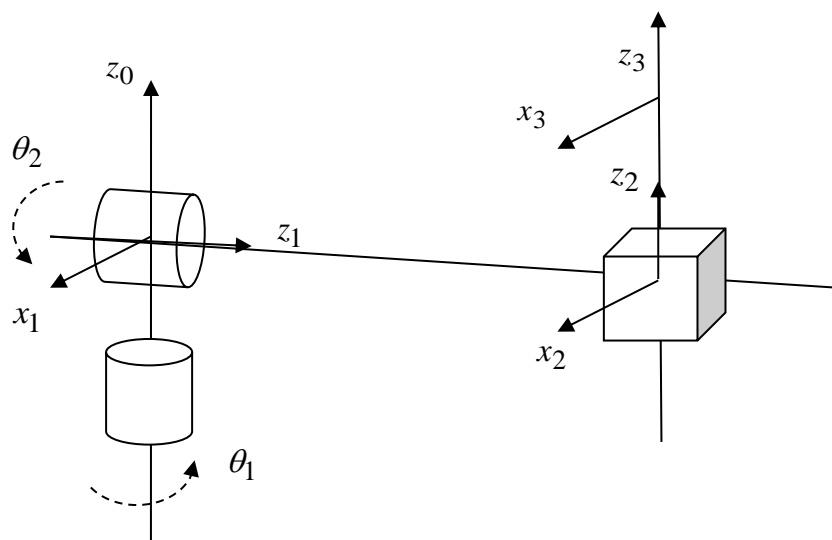
2.55. Да се определи директната кинематика на сферната роботска рака од Слика 2.31.

Решение: Параметрите на соодветниот Denavit-Hartenberg модел за набљудуваната роботска рака се дадени во Табела 2.9. Со помош на нив се определува директната кинематика на роботската рака.

Табела 2.9. D-H параметри на роботската рака од Слика 2.31

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	-90^0
2	θ_2	d_2	0	90^0
3	0	d_3	0	0

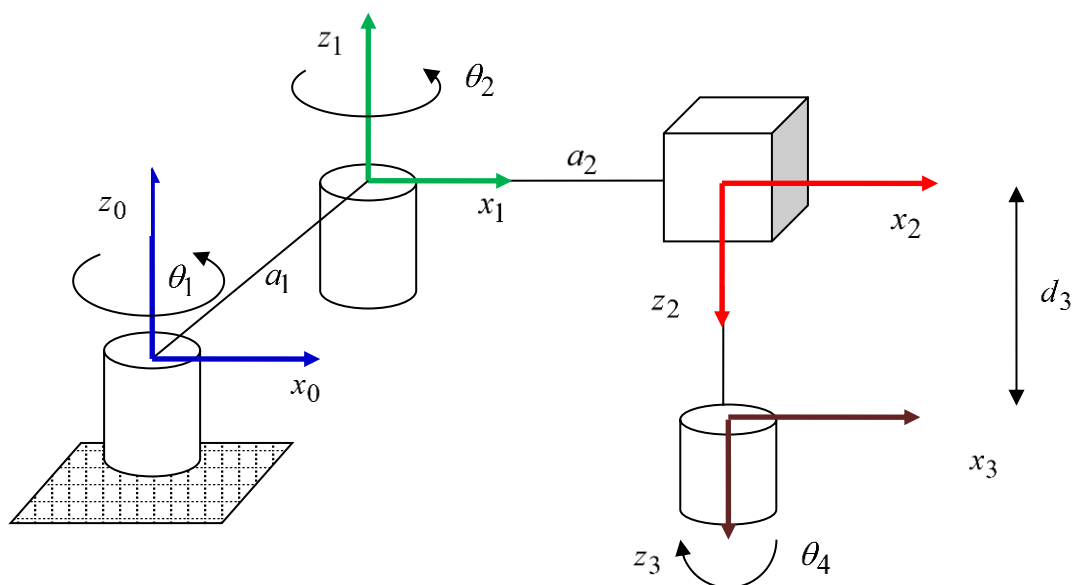
$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & C_1S_2 & C_1S_2d_3 - S_1d_2 \\ S_1C_2 & C_1 & S_1S_2 & S_1S_2d_3 + C_1d_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & C_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.252}
 \end{aligned}$$



Слика 2.31. Илустрација кон Задача 2.55

2.56. На Слика 2.32 е прикажана една SCARA роботската рака, која се состои од три зглоба и извршен елемент со еден степен слобода на движење. Движењето на извршниот елемент претставува ротација околу вертикалната оска. Да се определат D-H параметрите на овој робот и да се дефинира неговата трансформациона матрица ${}^R\mathbf{T}_H$, ако со \mathbf{R} е означен координатниот систем придружен со основата, а \mathbf{H} е координатниот систем придружен со последниот

зглоб од роботската рака. Потоа да се определи и положбата на извршниот елемент.



Слика 2.32. Илустрација кон Задача 2.56

Решение: D-Н параметрите за дадената SCARA роботска рака од Слика 2.32 се дадени во Табела 2.10.

Табела 2.10. D-Н параметри на SCARA роботска рака од Слика 2.32

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	a_1	0
2	θ_2	0	a_2	180°
3	0	d_3	0	0

Притоа, променливите на зглобовите се: $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2, q_3 = d_3$. Врз основа на D-Н параметрите, се пресметуваат матриците \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 и \mathbf{A}_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{Rot}(z, \theta_1) \mathbf{Trans}(0, 0, d_1) \mathbf{Trans}(a_1, 0, 0) \mathbf{Rot}(x, \alpha_1) = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.253)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{Rot}(z, \theta_2) \mathbf{Trans}(0, 0, d_2) \mathbf{Trans}(a_2, 0, 0) \mathbf{Rot}(x, \alpha_2) = \\ &= \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & -C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.254)$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{Rot}(z, \theta_3) \mathbf{Trans}(0, 0, d_3) \mathbf{Trans}(a_3, 0, 0) \mathbf{Rot}(x, \alpha_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.255)$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & -C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{T}_H \quad (2.256)$$

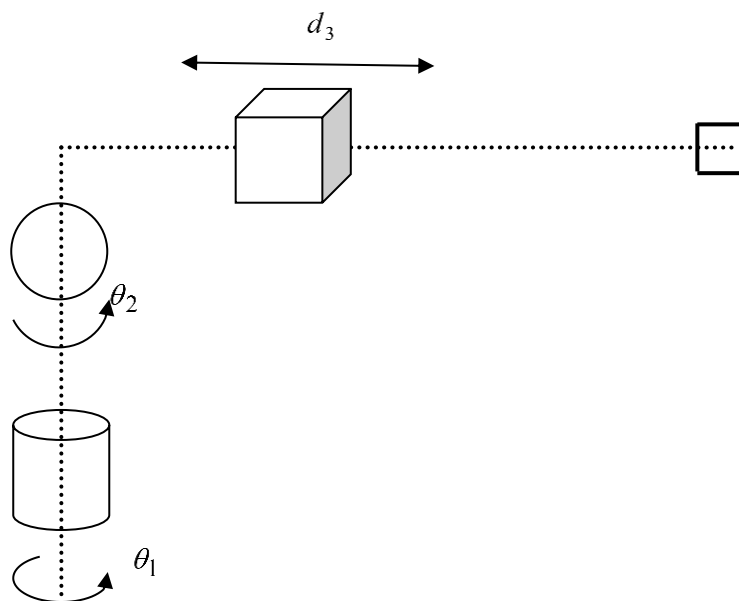
Положбата на извршниот елемент од набљудуваната роботска рака е определена со следната трансформациона матрица:

$${}^0\mathbf{T}_4 = {}^0\mathbf{T}_3 \cdot {}^3\mathbf{T}_4 = {}^0\mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{R}(z, \theta_4) =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & -C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (2.257)$$

$$= \begin{bmatrix} C_{12}C_4 + S_{12}S_4 & -C_{12}S_4 + S_{12}C_4 & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12}C_4 - C_{12}S_4 & -S_{12}S_4 - C_{12}C_4 & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.258)$$

2.57. Дадена е 2RP роботската рака од Слика 2.33. а) Да се претстават шематски зглобовите на раката заедно со придружените координатни системи $\{0\}$ - $\{3\}$.



Слика 2.33. Илустрација кон Задача 2.57

б) Да се состави табела D-Н параметри за дадената роботска рака. в) Да се определат сите матрици \mathbf{A} . г) Да се определи трансформационата матрица ${}^0\mathbf{T}_3$ преку матриците \mathbf{A} .

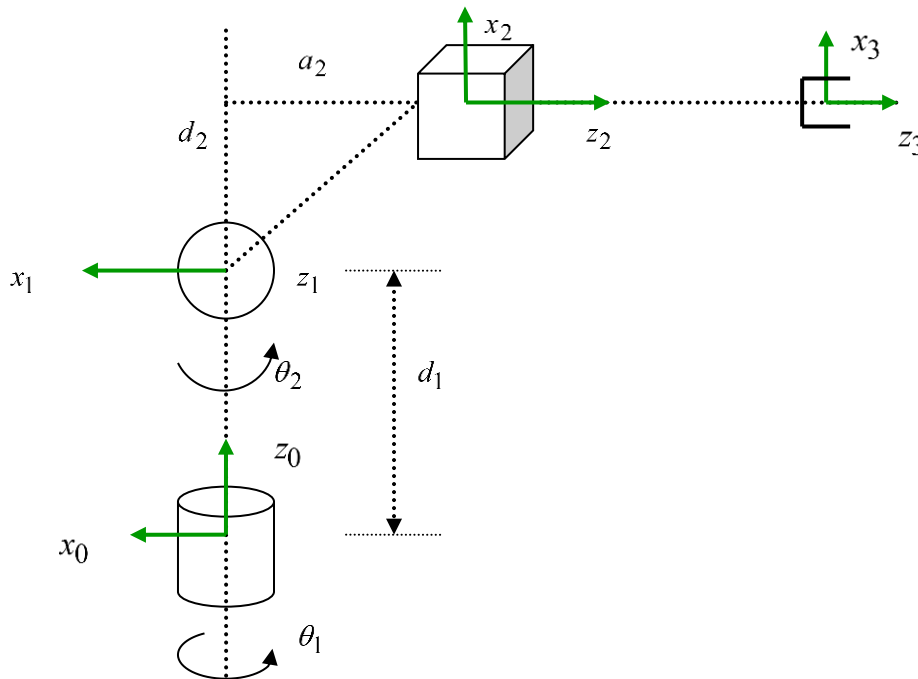
Решение: а) Дадената роботска рака од Слика 2.33 може да се претстави шематски како на Слика 2.34. Правецот и насоката на z_0 – оската се определува според правилото на десната рака, z_1 – оската е нормална на рамнината од листот и излегува од него, додека z_3 – оската е во правец на транслаторниот зглоб.

б) D-Н параметрите за дадената роботска рака се дадени во Табела 2.11.

Табела 2.11. D-Н параметри на роботската рака од Задачата 2.57

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	d_1	0	90^0
2	θ_2^*	d_2	a_2	90^0
3	0	d_3^*	0	0

Заради поголема едноставност во пресметките, а без каков и да било проблем, со соодветно поставување на координатните системи $\{1\}$ и $\{2\}$ може да се направи $d_1 = 0$ и $d_2 = 0$. (Без оглед на поставеноста на внатрешните координатни системи, резултатот ќе биде ист сè додека се совпаѓа поставеноста на крајните координатни системи, што е и логично, бидејќи се работи за иста положба на роботската рака, опишана со матрицата ${}^0\mathbf{T}_3$).



Слика 2.34. D-Н модел на роботската рака од Слика 2.33

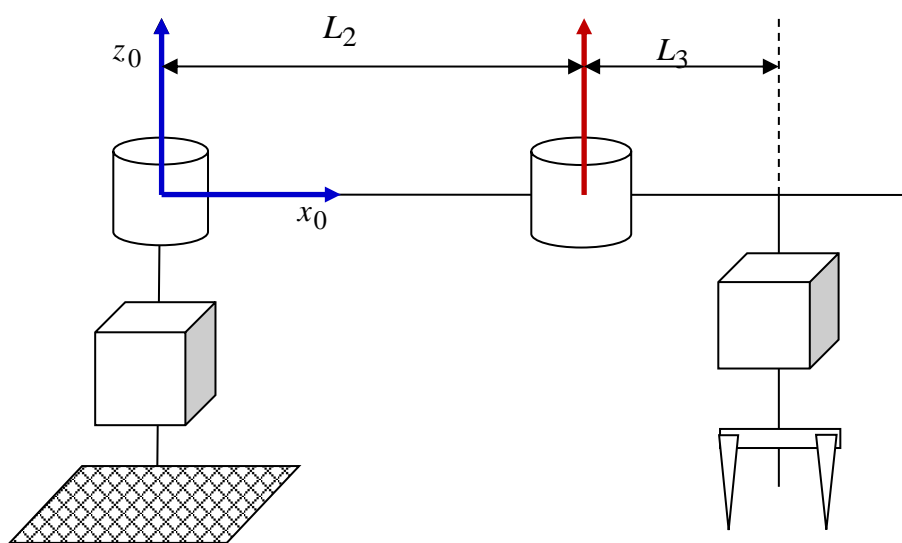
в) Со помош на D-H параметрите од горната табела се пресметуваат матриците:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & a_2 C_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 & a_2 S_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.259}$$

г) Трансформационата матрица ${}^0\mathbf{T}_3$ се добива како производ од матриците \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_3 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & a_2 C_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 & a_2 S_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 C_2 & S_1 & C_1 S_2 & C_1 C_2 a_2 + C_1 S_2 d_3 \\ S_1 C_2 & -C_1 & S_1 S_2 & S_1 C_2 a_2 + S_1 S_2 d_3 \\ S_2 & 0 & -C_2 & S_2 a_2 - C_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.260}$$

2.58. Дадена е PRRP роботската рака од Слика 2.35.



Слика 2.35. Илустрација кон Задача 2.58

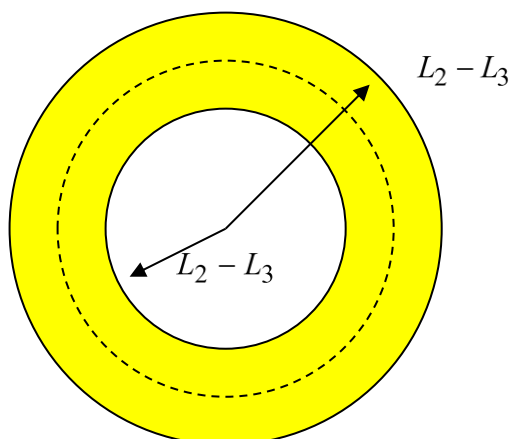
а) Под претпоставка дека не постојат ограничувања врз зглобовите, да се скицира работниот простор на раката. Да се усвои $L_2 > L_3$.

б) Да се определат D – H параметрите на раката и со нивна помош да се реши задачата на директната кинематика на оваа роботска рака.

в) Ако се набљудува само извршниот елемент на раката (хвотот), колку решенија во општ случај постојат на задачата на инверзната кинематика? (Упатство: за да се одговори на ова прашање не треба да се решава задачата на инверзната кинематика.)

г) Ако се отстрани првиот призматичен зглоб, така што првиот ротационен зглоб ќе ротира околу основата на роботската рака, и ако се набљудува само извршниот елемент на раката (хвотот), колку решенија во општ случај постојат на инверзната кинематска задача? (Упатство: и во овој случај, за да се одговори на прашањето не треба да се решава задачата на инверзната кинематика.)

Решение: а) Работниот простор на дадената роботска рака од Слика 2.35 е прикажан на Слика 2.36. Тој претставува бесконечен цилиндер долж z_0 - оската, со внатрешен радиус $L_2 - L_3$ и надворешен радиус $L_2 + L_3$.



Слика 2.36. Работен простор на роботската рака од Слика 2.35

б) D – H параметрите на раката се дадени во долната табела.

Табела 2.12. D – H параметри на сферната роботска рака од Слика 2.35

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	d_1	0	0
2	θ_2	0	L_2	0
3	θ_3	0	L_3	0
4	0	d_4	0	π

Оттука се добиваат следните хомогени трансформациони матрици:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.261)$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.262)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.263)$$

$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.264)$$

Следствено, директната кинематика на PRRP роботската рака од Слика 2.35 е опишана со трансформационата матрица:

$${}^0\mathbf{T}_4 = ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) \cdot ({}^3\mathbf{T}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_2C_3 - S_2S_3 & -C_2S_3 - S_2C_3 & 0 & C_2L_2 + L_3(C_2C_3 - S_2S_3) \\ S_2C_3 + C_2S_3 & -S_2S_3 + C_2C_3 & 0 & S_2L_2 + L_3(S_2C_3 + C_2S_3) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & C_2L_2 + L_3C_{23} \\ S_{23} & C_{23} & 0 & S_2L_2 + L_3S_{23} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & L_2C_2 + L_3C_{23} \\ S_{23} & C_{23} & 0 & L_2S_2 + L_3S_{23} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.265)$$

в) Роботската рака од Слика 2.36 може да го позиционира извршниот елемент само надолу. Меѓутоа, истата позиција на извршниот елемент може да се постигне со скусување на едниот и со издолжување на вториот призматичен зглоб за вредност Δ , што значи дека во овој случај задачата на инверзната кинематика има бесконечно многу решенија.

г) Постојат две вредности на променливите на ротационите зглобови за кои се добиват исти вредности за x и y – кога лактот на раката е горе и кога е доле. Следствено, во овој случај задачата на инверзната кинематика има две решенија.

2.59. Да се определат D – H параметрите на цилиндричната роботска рака од Задача 2.53 со сферен зглоб на шаката, како во Задача 2.54.

Решение: Целата конфигурација е прикажана на Слика 2.37. Како што може да се забележи, За определување на директната кинематика на оваа рака можат да се искористат веќе добиените резултати (2.247) и (2.251):

$${}^0\mathbf{T}_6 = {}^0\mathbf{T}_3 \cdot {}^3\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & -S_1d_3 \\ S_1 & 0 & C_1 & C_1d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 & C_4S_5d_6 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 & S_4S_5d_6 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & C_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.266)$$

каде што:

$$n_x = C_1C_4C_5C_6 - C_1S_4S_6 + S_1S_5C_6$$

$$n_y = S_1C_4C_5C_6 - S_1S_4S_6 - C_1S_5C_6$$

$$n_z = -S_4C_5C_6 - C_4S_6$$

$$o_x = C_1C_4C_5S_6 - C_1S_4C_6 - S_1S_5C_6$$

$$o_y = -S_1C_4C_5S_6 - S_1S_4S_6 + C_1S_5C_6$$

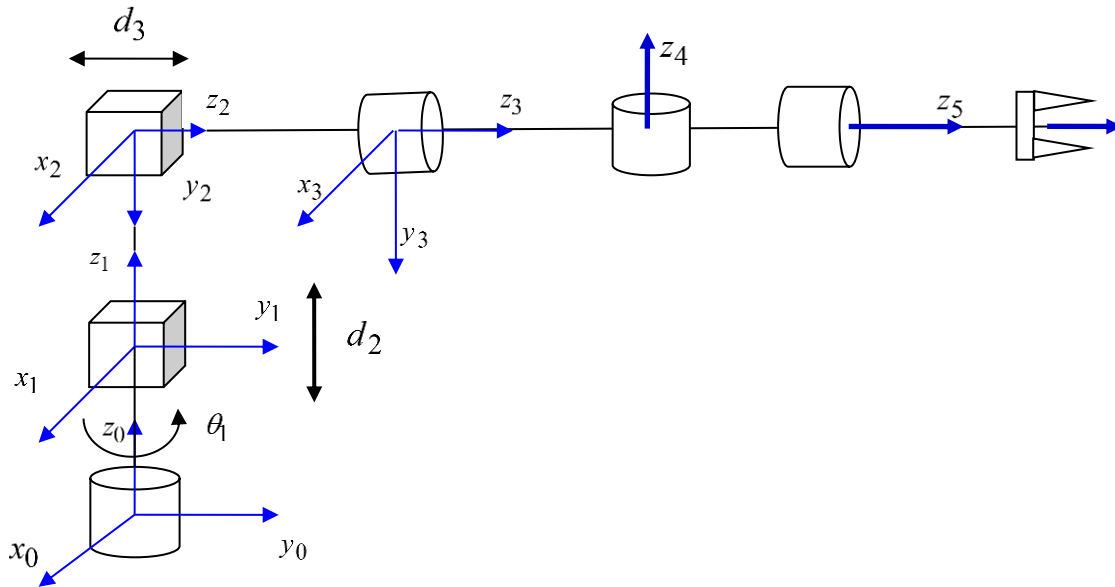
$$o_z = S_4C_5C_6 - C_4C_6$$

$$a_x = C_1C_4S_5 - S_1C_5$$

$$a_y = S_1C_4S_5 + C_1C_5$$

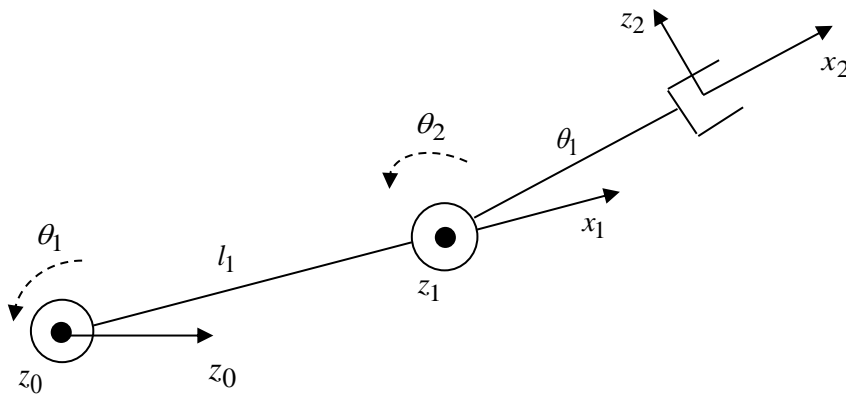
$$a_z = -S_4S_5$$

$$\begin{aligned}
 P_x &= C_1 C_4 S_5 d_6 - S_1 C_5 d_6 - S_1 d_3 \\
 P_y &= S_1 C_4 S_5 d_6 + C_1 C_5 d_6 + C_1 d_3 \\
 P_z &= -S_4 S_5 d_6 + d_1 + d_2
 \end{aligned}
 \tag{2.267}$$



Слика 2.37. Илустрација кон Задача 2.59

2.60. Роботската рака прикажана на Слика 2.38 има два степени слобода на движење. Должината на краците е $l_1 = l_2 = 1m$. Да се определат равенките на инверзната кинематика на набљудуваната роботска рака и да се пресметаат вредностите за аглите θ_1 и θ_2 , ако нејзината трансформациона матрица 0T_H е:



Слика 2.38. Илустрација кон Задача 2.60

$${}^0\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2C_{12} + l_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_2S_{12} + l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2924 & -0.9563 & 0 & 0.6978 \\ 0.9563 & -0.2924 & 0 & 0.8172 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.268)$$

Решение: За поедноставни пресметки ќе усвоиме:

$${}^0\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2C_{12} + l_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_2S_{12} + l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.9 & 0 & 0.7 \\ 0.9 & -0.3 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.269)$$

Оттука:

$$l_2C_{12} + l_1C_1 = 0.7 \Rightarrow -0.3 + C_1 = 0.7 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow \theta_1 = 0^0 \quad (2.270)$$

$$l_2S_{12} + l_1S_1 = 0.9 \Rightarrow 0.9 + S_1 = 0.9 \Rightarrow S_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0^0 \quad (2.271)$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{12} = C_2 = -0.3 \\ S_{12} = S_2 = 0.9 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_2 = \arctg \frac{0.9}{-0.3} \Rightarrow \theta_2 = -\arctg 3 = \begin{cases} 108.4376^0 \\ 198.4376^0 \end{cases} \quad (2.272)$$

2.61. Дадени се D-Н параметрите на една роботска рака. Да се нацрта раката во почетната положба ($\theta_1 = \theta_2 = 0$). Потоа да се определи нејзината инверзна кинематика.

Табела 2.13. D-Н параметри на роботската рака од Задача 2.61

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	0	-90^0
2	θ_2	0	0	$+90^0$
3	0	d_3	0	0

Решение: D-Н моделот на набљудуваната роботска рака е прикажан на Слика 2.39. Врз основа на Табела 2.13 се пресметуваат следните \mathbf{A} матрици:

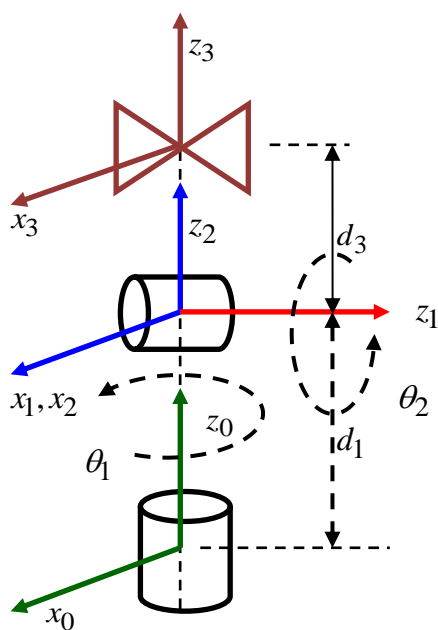
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.273)$$

Оттука, положбата на роботската рака во просторот е определена со трансформационата матрица:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & a_2C_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 & a_2S_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & C_1S_2 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & S_1S_2 & 0 \\ -S_2 & 0 & C_2 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & C_1S_2 & C_1S_2d_3 \\ S_1C_2 & C_1 & S_1S_2 & S_1S_2d_3 \\ -S_2 & 0 & C_2 & C_2d_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.274) \end{aligned}$$



Слика 2.39. Илустрација кон Задача 2.61

Вредностите на променливите на зглобовите на дадената роботска рака, со кои се постига саканата положба на раката, се пресметуваат на следниот начин:

$$\begin{cases} x = C_1S_2d_3 \\ y = S_1S_2d_3 \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{S_1S_2d_3}{C_1S_2d_3} = \frac{S_1}{C_1} = \operatorname{tg}(\theta_1) \Rightarrow \theta_1 = \operatorname{atan} 2(y, x) \quad (2.275)$$

$$x = C_1S_2d_3 \Rightarrow x^2 = C_1^2S_2^2d_3^2$$

$$y = S_1S_2d_3 \Rightarrow y^2 = S_1^2S_2^2d_3^2$$

$$x^2 + y^2 = C_1^2 S_2^2 d_3^2 + S_1^2 S_2^2 d_3^2 = S_2^2 d_3^2 \Rightarrow S_2^2 = \frac{x^2 + y^2}{d_3^2}$$

$$z = C_2 d_3 + d_1 \Rightarrow C_2 = \frac{z - d_1}{d_3} \Rightarrow C_2^2 = \frac{(z - d_1)^2}{d_3^2}$$

$$\frac{S_2^2}{C_2^2} = \frac{\frac{x^2 + y^2}{d_3^2}}{\frac{(z - d_1)^2}{d_3^2}} = \frac{x^2 + y^2}{(z - d_1)^2} \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta_2) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(z - d_1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_2 = a \tan 2\left(\sqrt{x^2 + y^2}, (z - d_1)\right) \quad (2.276)$$

$$z = C_2 d_3 + d_1 \Rightarrow d_3 = \frac{z - d_1}{C_2} \quad (2.277)$$

Исто така:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = S_2^2 d_3^2 \\ (z - d_1)^2 = C_2^2 d_3^2 \end{cases} \Rightarrow S_2^2 d_3^2 + C_2^2 d_3^2 = d_3^2 = x^2 + y^2 + (z - d_1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d_1)^2} \quad (2.278)$$

2.62. Дадени се D-Н параметрите на една роботска рака. Да се нацрта раката во почетната положба ($\theta_1 = \theta_2 = 0$). Потоа да се определи нејзината инверзна кинематика.

Табела 2.14. D-Н параметри на роботската рака од Задача 2.62

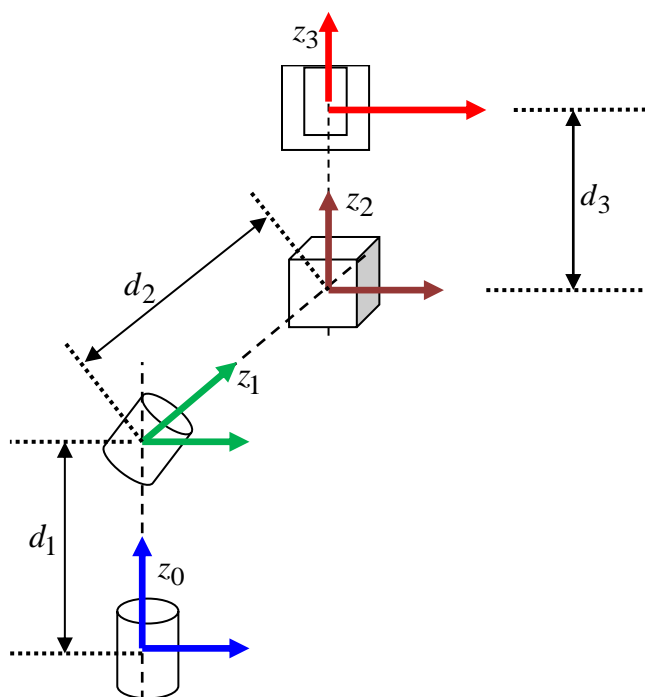
i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	0	-90^0
2	θ_2	d_2	0	$+90^0$
3	0	0	0	0^0

Решение: D-Н моделот на набљудуваната роботска рака е прикажан на Слика 2.40. Врз основа на дадените D-Н параметрите, се пресметуваат следните **A** матрици:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.279)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.280)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.281)$$



Слика 2.40. Роботската рака од Задача 2.62

Оттука, положбата на роботската рака во просторот е определена со трансформационската матрица:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_3 &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & C_1S_2 & -S_1d_2 \\ S_1C_2 & C_1 & S_1S_2 & C_1d_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & S_1 S_2 & S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.282)$$

За решението на инверзната задача на раката се добива:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2 \\ y &= S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 \end{aligned} \right\} \quad ()^2$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= C_1^2 S_2^2 d_3^2 + S_1^2 d_2^2 - 2C_1 S_2 d_3 S_1 d_2 \\ y^2 &= S_1^2 S_2^2 d_3^2 + C_1^2 d_2^2 + 2S_1 S_2 d_3 C_1 d_2 \end{aligned} \right\} \quad +$$

$$x^2 + y^2 = S_2^2 d_3^2 + d_2^2 \Rightarrow$$

$$S_2^2 = \frac{x^2 + y^2 - d_2^2}{d_3^2} \Rightarrow S_2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - d_2^2}}{d_3}$$

$$C_2 d_3 + d_1 = z \Rightarrow C_2 = \frac{z - d_1}{d_3}$$

$$\frac{S_2}{C_2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - d_2^2}}{z - d_1} = \operatorname{tg}(\theta_2) \Rightarrow \theta_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - d_2^2}}{z - d_1} \right) \quad (2.283)$$

$$\begin{aligned} x &= C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2 \cdot C_1 \Rightarrow \\ y &= S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 \cdot S_1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x C_1 &= C_1^2 S_2 d_3 - S_1 C_1 d_2 \\ y S_1 &= S_1^2 S_2 d_3 + S_1 C_1 d_2 \end{aligned} \right\} \quad +$$

$$x C_1 + y S_1 = C_1^2 S_2 d_3 - S_1 C_1 d_2 + S_1^2 S_2 d_3 + S_1 C_1 d_2 \Rightarrow$$

$$x C_1 + y S_1 = S_2 d_3$$

$$\begin{aligned} x &= C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2 \cdot S_1 \Rightarrow \\ y &= S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 \cdot C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x S_1 &= S_1 C_1 S_2 d_3 - S_1^2 d_2 \Rightarrow \\ y C_1 &= S_1 C_1 S_2 d_3 + C_1^2 d_2 \end{aligned}$$

$$y C_1 - x S_1 = S_1 C_1 S_2 d_3 + C_1^2 d_2 - S_1 C_1 S_2 d_3 + S_1^2 d_2$$

$$y C_1 - x S_1 = d_2$$

$$\begin{cases} xC_1 + yS_1 = S_2d_3 \\ yC_1 - xS_1 = d_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y & x \\ -x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2d_3 \\ d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{S_1}{C_1} = \frac{yS_2d_3 - xd_2}{xS_2d_3 + yd_2} = \operatorname{tg}(\theta_1) \Rightarrow \theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{yS_2d_3 - xd_2}{xS_2d_3 + yd_2}\right) \quad (2.284)$$

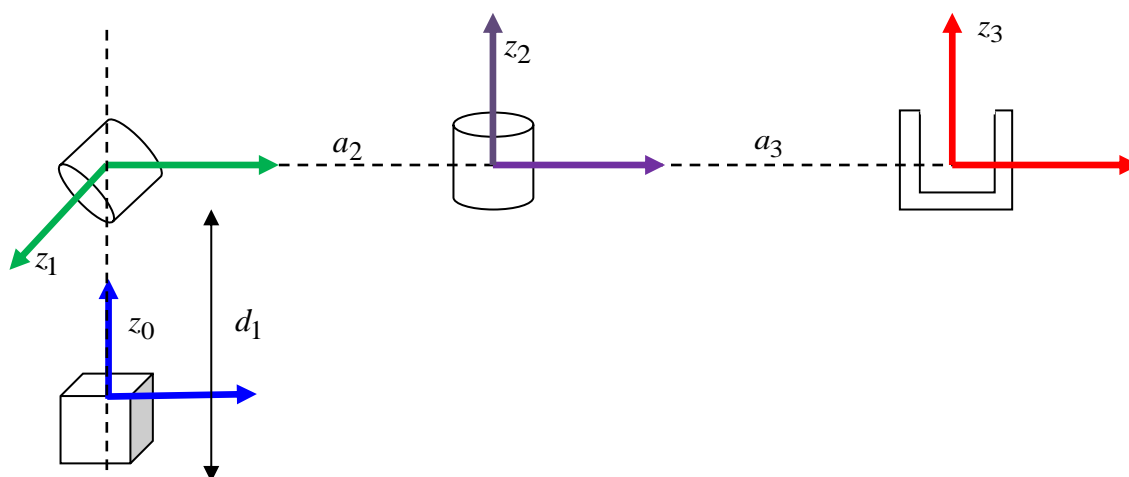
$$d_3 = \frac{z - d_1}{C_2} \quad (2.285)$$

2.63. D-H параметрите на една роботска рака се дадени во долната табела. Да се нацрта раката во почетната положба ($\theta_2 = \theta_3 = 0$). Потоа да се определи нејзината инверзна кинематика.

Табела 2.15. D-H параметри на роботската рака од Задача 2.63

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	d_1	0	$+90^\circ$
2	θ_2	0	a_2	-90°
3	θ_3	0	a_3	0°

Решение: Зададената роботска рака е прикажана на Слика 2.41, а нејзината директна кинематика се пресметува на следниот начин:



Слика 2.41. Роботската рака од Задача 2.63

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.286)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2 C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2 S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.287)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.288)$$

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2 C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2 S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2 C_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2 S_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_2 C_3 & -C_2 S_3 & -S_2 & a_3 C_2 C_3 + a_2 C_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ S_2 C_3 & -S_2 S_3 & C_2 & a_3 S_2 C_3 + a_2 S_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.289) \end{aligned}$$

$$x = a_3 C_2 C_3 + a_2 C_2 \cdot S_2$$

$$z = a_3 S_2 C_3 + a_2 S_2 + d_1 \cdot C_2$$

$$x S_2 = a_3 C_2 C_3 S_2 + a_2 C_2 S_2$$

$$z C_2 = a_3 S_2 C_3 C_2 + a_2 S_2 C_2 + d_1 C_2$$

$$z C_2 - x S_2 = d_1 C_2 \Rightarrow$$

$$(z - d_1) C_2 = x S_2 \Rightarrow \frac{S_2}{C_2} = \frac{z - d_1}{x} \Rightarrow \theta_2 = \arctg\left(\frac{z - d_1}{x}\right) \quad (2.290)$$

$$x = a_3 C_2 C_3 + a_2 C_2 \cdot C_2$$

$$z = a_3 S_2 C_3 + a_2 S_2 + d_1 \cdot S_2$$

$$x C_2 = a_3 C_2^2 C_3 + a_2 C_2^2$$

$$zS_2 = a_3S_2^2C_3 + a_2S_2^2 + d_1S_2$$

$$xC_2 + (z - d_1)S_2 = a_3C_3 + a_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_3S_3 = y \\ a_3C_3 = xC_2 + (z - d_1)S_2 - a_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_3}{C_3} = \frac{y}{xC_2 + (z - d_1)S_2 - a_2} = \operatorname{tg} \theta_3 \Rightarrow$$

$$\theta_3 = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{xC_2 + (z - d_1)S_2 - a_2} \right) \quad (2.291)$$

$$a_3^2C_2^2C_3^2 + a_2^2C_2^2 + 2a_2a_3C_2^2C_3 = x^2$$

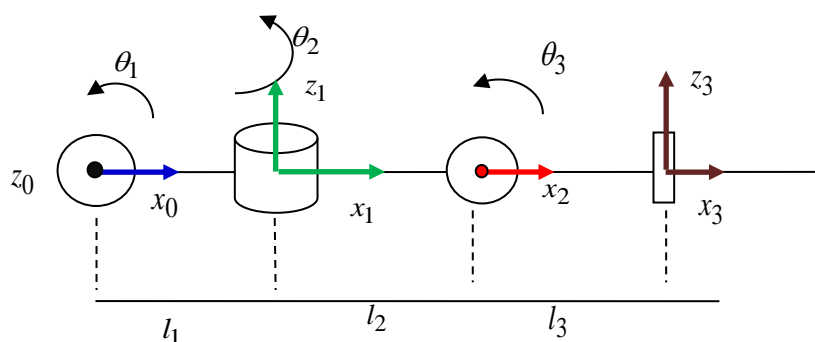
$$a_3^2S_2^2C_3^2 + a_2^2S_2^2 + 2a_2a_3S_2^2C_3 = (z - d_1)^2$$

$$a_3^2C_3^2 + 2a_2a_3C_3 + a_2^2 - x^2 - (z - d_1)^2 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{-a_2 \pm \sqrt{x^2 + (z - d_1)^2}}{a_3}$$

$$\begin{cases} a_3S_3 = y \\ a_3C_3 = -a_2 \pm \sqrt{x^2 + (z - d_1)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_3}{C_3} = \frac{y}{-a_2 \pm \sqrt{x^2 + (z - d_1)^2}} = \operatorname{tg} \theta_3 \Rightarrow$$

$$\theta_3 = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{-a_2 \pm \sqrt{x^2 + (z - d_1)^2}} \right) \quad (2.292)$$

2.64. Да се определи инверзната кинематика на роботската рака од Слика 2.42. Под претпоставка, $l_1 = l_2 = l_3 = 1$.



Слика 2.42. Илустрација кон Задача 2.64

Решение: Параметрите на соодветниот Denavit-Hartenberg модел за набљудуваната роботска рака се дадени во Таблица 2.16. Со помош на нив се определува директната кинематика на роботската рака.

Табела 2.16. D-H параметри на роботската рака од Слика 2.42

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	1	-90^0
2	θ_2	0	1	$+90^0$
3	θ_3	0	1	-90^0

Трансформациската матрица на директната кинематика на набљудуваната роботска рака е:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_3 &= \\
 &= \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 - S_1S_3 & -C_1S_2 & -C_1C_2S_3 - S_1C_3 & C_1C_2C_3 - S_1S_3 + C_1C_2 + C_1 \\ S_1C_2C_3 + C_1S_3 & -S_1S_2 & -S_1C_2S_3 + C_1C_3 & S_1C_2C_3 + C_1S_3 + S_1C_2 + S_1 \\ -S_2C_3 & -C_2 & S_2S_3 & -S_2C_3 - S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.293)
 \end{aligned}$$

За да се реши задачата на инверзната кинематика, треба да се реши матричната равенка:

$$\begin{aligned}
 {}^0T_3 &= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 - S_1S_3 & -C_1S_2 & -C_1C_2S_3 - S_1C_3 & C_1C_2C_3 - S_1S_3 + C_1C_2 + C_1 \\ S_1C_2C_3 + C_1S_3 & -S_1S_2 & -S_1C_2S_3 + C_1C_3 & S_1C_2C_3 + C_1S_3 + S_1C_2 + S_1 \\ -S_2C_3 & -C_2 & S_2S_3 & -S_2C_3 - S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.294)
 \end{aligned}$$

во која фигурираат производи од синуси и косинуси од непознатите променливи. Затоа најнапред се врши раздвојување на одделните множители, така што равенката (2.294) ќе се помножи од лево со инверзната матрица кон ${}^0\mathbf{T}_1$:

$$\left({}^0\mathbf{T}_1\right)^{-1} = (\mathbf{A}_1)^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.295)$$

Така се добива:

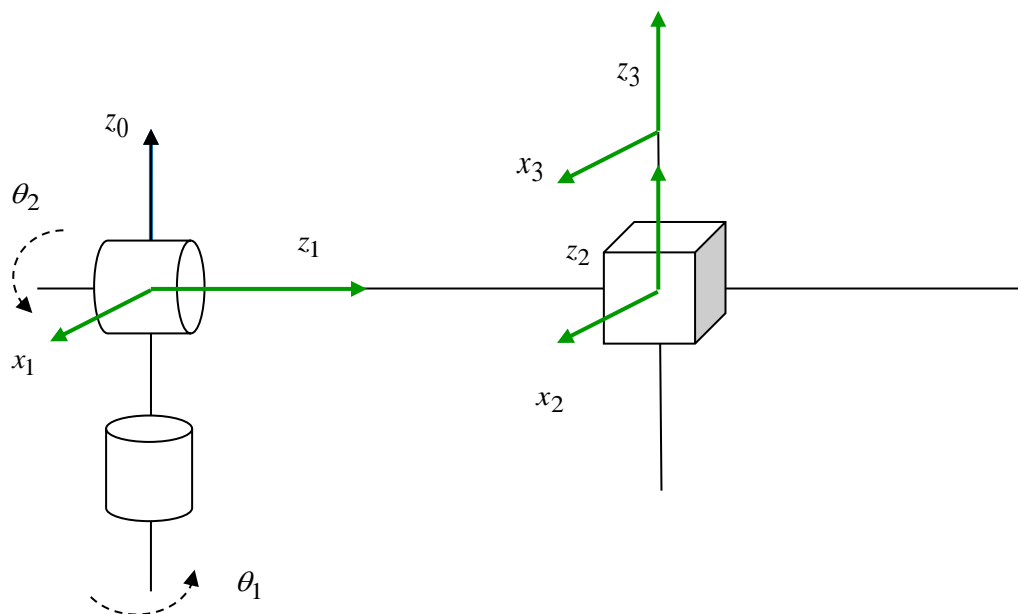
$$\left({}^0\mathbf{T}_1\right)^{-1} \cdot \left({}^0\mathbf{T}_3\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} C_1 n_x + S_1 n_y & C_1 o_x + S_1 o_y & C_1 a_x + S_1 a_y & C_1 p_x + S_1 p_y - 1 \\ -n_z & -o_z & -a_z & -p_z \\ -S_1 n_x + C_1 n_y & -S_1 o_x + C_1 o_y & -S_1 a_x + C_1 a_y & -S_1 p_x + C_1 p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_2 C_3 & -S_2 & -C_2 S_3 & C_2 C_3 + C_2 \\ S_2 C_3 & C_2 & -S_2 S_3 & S_2 C_3 + S_2 \\ S_3 & 0 & C_3 & S_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.296)
 \end{aligned}$$

и променливите на зглобовите θ_1 , θ_2 и θ_3 ќе бидат дадени со следните изрази:

$$\begin{aligned}
 C_2 C_3 &= C_1 n_x + S_1 n_y \\
 S_2 C_3 &= -n_z \\
 S_3 &= -S_1 n_x + C_1 n_y \\
 -S_2 &= C_1 o_x + S_1 o_y \\
 C_2 &= -o_z \\
 0 &= -S_1 o_x + C_1 o_y \\
 -C_2 S_3 &= C_1 a_x + S_1 a_y \\
 -S_2 S_3 &= -a_z \\
 C_3 &= -S_1 a_x + C_1 a_y
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \arctg\left(\frac{o_y}{o_x}\right) \\ \theta_2 = \arctg\left(\frac{-a_z}{C_1 a_x + S_1 a_y}\right) \\ \theta_3 = \arct\left(\frac{-S_1 n_x + C_1 n_y}{-S_1 a_x + C_1 a_y}\right) \end{array} \right. \quad (2.297)$$

2.65. Дадена е RRP роботската рака од Слика 2.43. Да се определи нејзината инверзна кинематика.



Слика 2.43. Илустрација кон Задача 2.65

Решение: Параметрите на соодветниот Denavit-Hartenberg модел за набљудуваната роботска рака се дадени во Табела 2.17. Со помош на нив се определува директната кинематика на роботската рака.

Табела 2.17. D-H параметри на роботската рака од Слика 2.43

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	-90^0
2	θ_2	d_2	0	90^0
3	0	d_3	0	0

Со помош на параметрите од Табела 2.17 се определуваат матриците:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.300)$$

па трансформационата матрица:

$${}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & S_1 S_2 & S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.301)$$

ја дефинира директната кинематика на раката. Одредувањето на инверзната кинематика на набљудуваната роботска рака претпоставува решавање на матричната равенка:

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & S_1 S_2 & S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.302)$$

За да се раздружат членовите кои претставуваат производи од синуси и косинуси на променливите на зглобовите од раката, матрицата (2.306) се множи од лево со инверзната матрица кон матрицата (2.302):

$$\left({}^0\mathbf{T}_1\right)^{-1} = (\mathbf{A}_1)^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.303)$$

Така се добива матричната равенка:

$$\begin{bmatrix} C_1 n_x + S_1 n_y & C_1 o_x + S_1 o_y & C_1 a_x + S_1 a_y & C_1 p_x + S_1 p_y \\ -n_z & -o_z & -a_z & -p_z \\ -S_1 n_x + C_1 n_y & -S_1 o_x + C_1 o_y & -S_1 a_x + C_1 a_y & -S_1 p_x + C_1 p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & S_2 d_3 \\ S_2 & 0 & -C_2 & -C_2 d_3 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.304)$$

од каде произлегуваат следните релации:

$$C_2 = C_1 n_x + S_1 n_y$$

$$S_2 = -n_z$$

$$0 = -S_1 n_x + C_1 n_y$$

$$0 = C_1 o_x + S_1 o_y$$

$$0 = -o_z$$

$$1 = -S_1 o_x + C_1 o_y$$

$$S_2 = C_1 a_x + S_1 a_y$$

$$-C_2 = -a_z$$

$$0 = -S_1 a_x + C_1 a_y$$

$$S_2 d_3 = C_1 p_x + S_1 p_y$$

$$-C_2 d_3 = -p_z$$

$$d_2 = -S_1 p_x + C_1 p_y \quad (2.305)$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{o_x}{o_y} \right) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{n_y}{n_x} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{a_y}{a_x} \right) \quad (2.306)$$

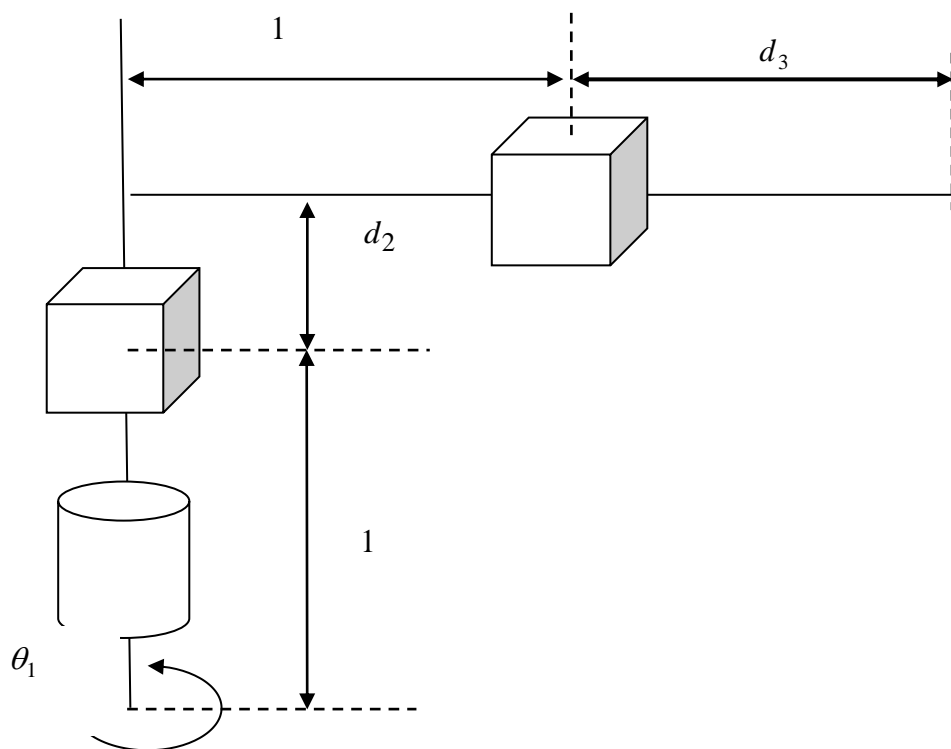
$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{n_z}{a_z} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{C_1 a_x + S_1 a_y}{C_1 n_x + S_1 n_y} \right) \quad (2.307)$$

$$d_3 = \left(\frac{p_z}{a_z} \right) \quad (2.308)$$

2.66. Дадена е роботската рака од Слика 2.46. Најнапред да се определи директната кинематика на набљудуваниот роботски механизам, ако почетните вредности на променливите на неговите зглобови се:

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0^0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.309)$$

Потоа да се определи новата положба \mathbf{T}_{nova} на набљудуваниот роботски механизам во просторот, која се добива кога тој ќе се заврти за агол од 90^0 околу a -оската на локалниот координатен систем придружен со неговиот краен зглоб. На крај да се определи за колку треба да се придвижат одделните зглобови од роботскиот манипулатор, за тој да се најде во положбата $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}^T$.



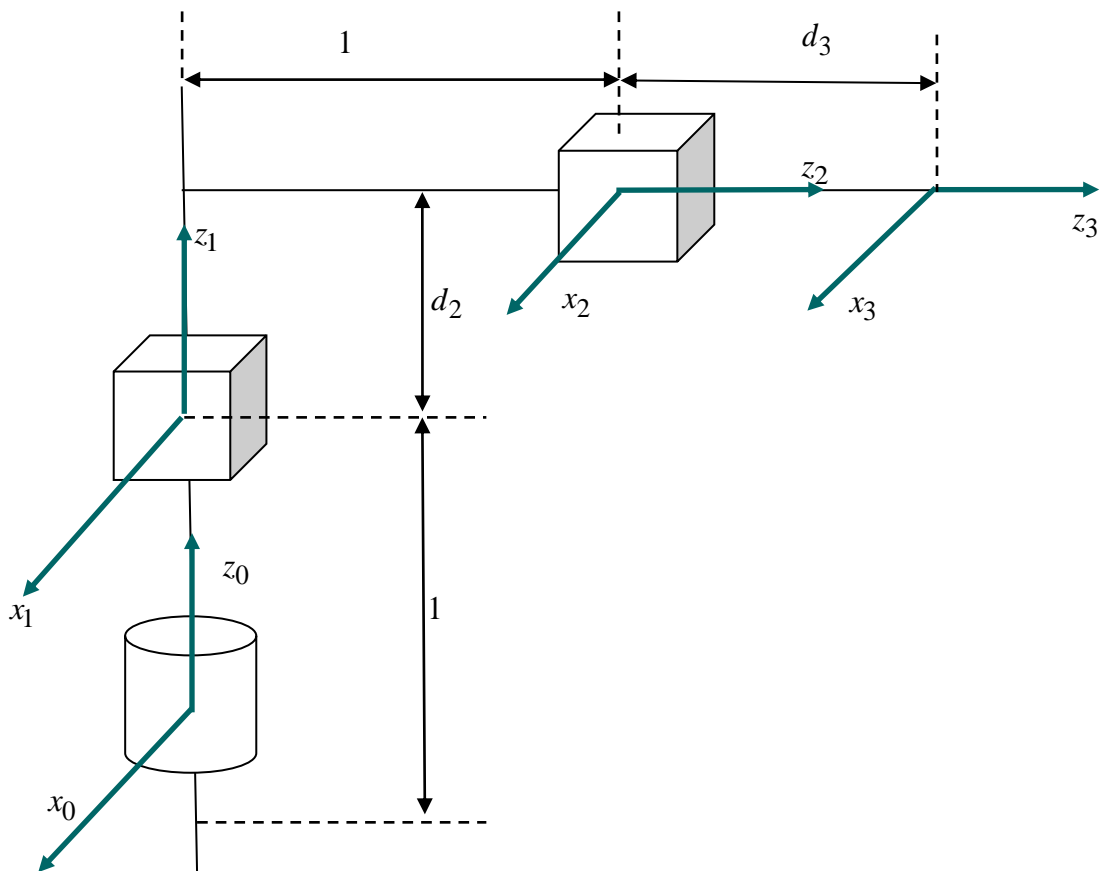
Слика 2.44. Илустрација кон Задача 2.66

Решение: Ако соодветните координатни системи се доделат како на Слика 2.45, D-H параметрите на дадената роботска рака ќе бидат како во Табела 2.18.

Табела 2.18. D-H параметри на роботската рака од Слика 2.44

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	1	0	0^0
2	0^0	d_2	1	-90^0
3	0^0	d_3	0	0^0

Треба да се уочи дека изборот на правецот на x_0 – оската, како и позицијата на координатниот систем $\{0\}$ долж z_0 – оската се сосема произволни. Во нашиот случај направен е сосема природен избор за позицијата на координатниот почеток O_0 , но тој може да се смести и во било која друга точка долж z_0 – оската, на пример, може да се поклопи со координатниот почеток O_1 на координатниот систем $\{1\}$. Исто така, за $\theta_1 = 0^0$ x_0 – оската е паралелна со x_1 – оската, но нејзиниот правец се менува бидејќи и θ_1 се менува. Тогаш, за трансформационите матрици A_1 , A_2 и A_3 се добива:



Слика 2.45. Илустрација кон Задача 2.66

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.310)$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.311)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.312)$$

па, бараниот модел на раката ќе биде даден со трансформационата матрица:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_3 &= ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & -d_3 S_1 - S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & d_3 C_1 + C_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.313)$$

За дадените вредности на променливите од раката, нејзината почетна положба ќе биде:

$$\mathbf{T}_{\text{поч}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.314)$$

Новата положба на раката по ротацијата за агол од 90^0 околу a -оската на локалниот координатен систем придружен со нејзиниот краен зглоб е производ од матрицата на почетната состојба и матрицата на извршената ротација:

$$\mathbf{T}_{nova} = \mathbf{T}_{poc} \mathbf{Rot}(a, 90^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.315)$$

Ако саканата положба на роботската рака се означи со $\mathbf{P} = [x \ y \ z]^T$, тогаш решението на нејзината инверзна кинематска задача ќе биде:

$$-d_3 S_1 - S_1 = x$$

$$d_3 C_1 + C_1 = y$$

$$\begin{cases} -d_3 S_1 - S_1 = x \\ d_3 C_1 + C_1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -S_1(d_3 + 1) = x \\ C_1(d_3 + 1) = y \end{cases} \Rightarrow (d_3 + 1)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow d_3 = -1 + \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.316)$$

$$d_2 + 1 = z \Rightarrow d_2 = z - 1 \quad (2.317)$$

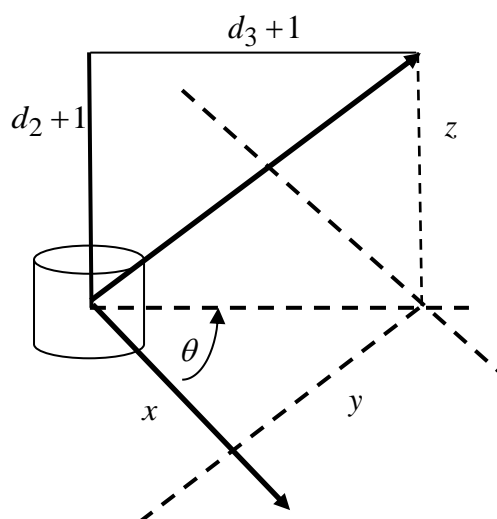
$$\begin{cases} -S_1(d_3 + 1) = x \\ C_1(d_3 + 1) = y \end{cases} \Rightarrow \frac{S_1}{C_1} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \theta_1 = \text{atan} 2(-x, y) \quad (2.318)$$

Инверзната кинематика на дадената роботска рака може да се определи и по геометриски пат, според Слика 2.48. Саканата положба на роботската рака се постига со следните вредности на променливите од роботската рака:

$$d_3 = -1 + \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad (2.319)$$

$$d_2 = z - 1 = 4 \quad (2.320)$$

$$\theta_1 = \text{atan} 2(-x, y) = -30^0 \quad (2.321)$$



Слика 2.46. Решение на инверзната кинематика на дадената роботска рака

3. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ДВИЖЕЊА И БРЗИНИ

Под поимот **диференцијални движења** се подразбираат многу мали движења на еден механизам, во овој случај роботска рака, односно движења за мал интервал на време dt . Се користат за одредување на брзината на движење на одделните делови од роботската рака. За роботска рака со шест степени слобода на движење, може да се состави следната матрична равенка:

$$\mathbf{D} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q \quad (3.1)$$

каде што:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

е вектор на диференцијалните движења на набљудуваната роботска рака со димензија 6×1 , а:

$$\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

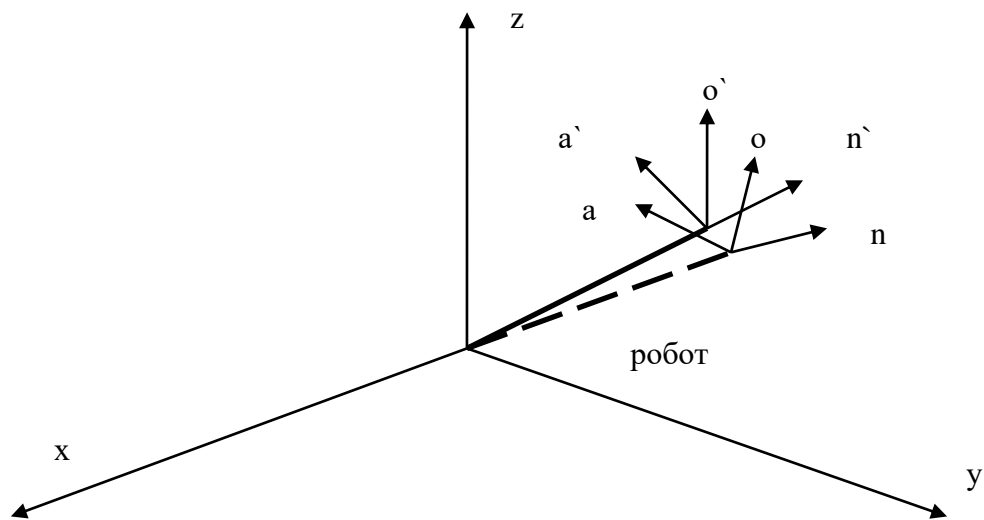
е вектор на диференцијалните движења на зглобовите од раката, во овој случај со иста димензија 6×1 . Во општ случај, димензијата на векторот \mathbf{D}_q е $n \times 1$, каде што n е бројот степени слобода на движење на раката. Првите три елементи на векторот \mathbf{D} , dx , dy и dz , ги претставуваат диференцијалните движења на раката долж x , y и z – оската, соодветно, додека елементите δx , δy и δz ги претставуваат диференцијалните ротации на раката околу x , y и z – оската, соодветно. \mathbf{J} во изразот (3.1) претставува матрица со димензија 6×6 и се нарекува **Јакобијан** на набљудуваната роботска рака. Во општ случај на роботска рака со n степени слобода на движење Јакобијанот \mathbf{J} на раката ќе има димензија $n \times 6$. Врз основа на кажаното, матричната равенка (3.1) може да се запише и на следниот начин:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Jakobijan} \\ \text{na} \\ \text{robotot} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ако векторите \mathbf{D} и \mathbf{D}_q во (3.1) се поделат со dt , наместо одделните диференцијални движења тие ќе ги претставуваат соодветните брзини на роботската рака \mathbf{v} и нејзините зглобови $\dot{\mathbf{q}}$, па може да се запише:

$$\mathbf{v} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (3.5)$$

Јакобијанот е основна величина во кинематиката на една роботска рака. Тој ја дефинира врската помеѓу диференцијалните движења и брзините на одделните зглобови на раката и диференцијалните движења и брзини на самата рака. Неговите елементи се функции од променливите на зглобовите на раката, кои се менуваат со времето, па, следствено, елементите на Јакобијанот се временски функции. На Слика 3.1 се прикажани диференцијалните движења на конкретна роботска рака, кои се набљудуваат преку соодветните движења на координатниот систем придружен со крајот од раката.



Слика 3.1. Диференцијално движење на координатен систем придружен со една роботска рака во зависност од диференцијалните движења на раката

Кога зглобовите на роботската рака ќе се придвижат за диференцијал од растојание или агол на ротација, координатниот систем придружен со роботската рака исто така ќе се придвижи за соодветна диференцијална вредност. Следствено, движењата на координатниот систем придружен кон

роботската рака зависат од диференцијалните движења на зглобовите на раката. Диференцијалните движења на еден подвижен координатен систем можат да бидат:

- диференцијални транслации
- диференцијални ротации
- комбинација од диференцијални транслации и ротации (диференцијални трансформации)

Под **диференцијална транслација** на еден координатен систем се подразбира транслаторно движење на тој координатен систем долж координатните оски на референтниот координатен систем за многу мали (диференцијални) вредности dx, dy и dz . Ова движење е опишано со матрицата **Trans**(dx, dy, dz):

$$\mathbf{Trans}(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Под **диференцијална ротација** се подразбира многу мала ротација на подвижниот координатен систем околу некоја од оските на референтниот координатен систем. Во општ случај диференцијалната ротација за агол $d\theta$ околу некоја оска k се опишува со матрицата $\mathbf{R}(k, d\theta)$. Конкретно, диференцијалните ротации на еден подвижен координатен систем околу оските на референтниот координатен систем (x, y, z) се означуваат со $\delta x, \delta y$ и δz , соодветно, и се дефинирани со следните матрици:

$$\mathbf{R}(x, \delta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{R}(y, \delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{R}(z, \delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Во изразите (3.7) – (3.9) се применети следните апроксимации:

$$\sin \delta x \approx \delta x$$

$$\sin \delta y \approx \delta y$$

$$\sin \delta z \approx \delta z$$

$$\cos \delta x \approx 1$$

$$\cos \delta y \approx 1$$

$$\cos \delta z \approx 1 \tag{3.10}$$

бидејќи аглите $\delta x, \delta y$ и δz се многу мали.

Множењето матрици во општ случај не е комутативно. Затоа, редоследот на матриците при нивното множење е многу битен во анализата на движењето на роботите, кое е претставено со соодветни трансформациони матрици и нивни производи. Меѓутоа, кај диференцијалните движења ова не важи. Тоа значи дека редоследот на множење на матриците на диференцијални движења не е битен. Така, ако се помножат матриците на диференцијалните ротации (3.7) и (3.8) во различен редослед, ќе се добијат следните резултати:

$$\mathbf{R}(x, \delta x) \times \mathbf{R}(y, \delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ \delta x \delta y & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\mathbf{R}(y, \delta y) \times \mathbf{R}(x, \delta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta x \delta y & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

На прв поглед резултатите (3.11) и (3.12) се разликуваат еден од друг. Меѓутоа, диференцијалните вредности се многу мали, па во математиката диференцијалите од повисок ред се сметаат за занемарливо мали величини и како такви можат да се испуштат. Така, со занемарување на производите $\delta x \delta y$ во изразите (3.11) и (3.12), за производите $\mathbf{R}(x, \delta x) \times \mathbf{R}(y, \delta y)$ и $\mathbf{R}(y, \delta y) \times \mathbf{R}(x, \delta x)$ се добива ист резултат.

Ротацијата околу произволна оска \mathbf{k} може да се претстави како комбинација од диференцијални ротации околу координатните оски (x, y, z) во произволен редослед и таа е опишана со следната матрица:

$$\mathbf{R}(k, d\theta) = \mathbf{R}(x, \delta x) \times \mathbf{R}(y, \delta y) \times \mathbf{R}(z, \delta z) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Во изразот (3.13) се занемарени сите диференцијали од повисок ред.

Вкупната диференцијална трансформација на еден подвижен координатен систем е комбинација од сите негови диференцијални транслации и ротации. Ако оригиналниот координатен систем се означи со \mathbf{T} , а неговата промена како резултат од дадена диференцијална трансформација се означи со $d\mathbf{T}$, тогаш:

$$\mathbf{T} + d\mathbf{T} = [\mathbf{Trans}(dx, dy, dz)\mathbf{R}(k, d\theta)] \cdot \mathbf{T} \quad (3.14)$$

$$d\mathbf{T} = [\mathbf{Trans}(dx, dy, dz)\mathbf{R}(k, d\theta) - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{T} \quad (3.15)$$

каде што \mathbf{I} е единичната матрица, а $d\mathbf{T}$ ја претставува промената на координатниот систем по диференцијалната трансформација. Равенката (3.15) може да се запише како:

$$d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} \quad (3.16)$$

каде што:

$$\Delta = \mathbf{Trans}(dx, dy, dz)\mathbf{R}(k, d\theta) - \mathbf{I} \quad (3.17)$$

се нарекува **диференцијален оператор** и се пресметува како разлика од производот на матриците на диференцијални транслации и ротации и единичната матрица \mathbf{I} :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Треба да се уочи дека диференцијалниот оператор не претставува трансформациона матрица или координатен систем. Тој е оператор кој предизвикува соодветни промени кај даден координатен систем. Така, ако еден координатен систем \mathbf{T} се помножи со диференцијалниот оператор Δ , ќе се добие неговата промена $d\mathbf{T}$ по соодветната диференцијална трансформација опишана со Δ . Целосниот изглед на матрицата $d\mathbf{T}$ е прикажан во продолжение:

$$d\mathbf{T} = \begin{bmatrix} dn_x & do_x & da_x & dp_x \\ dn_y & do_y & da_y & dp_y \\ dn_z & do_z & da_z & dp_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Секој елемент од матрицата $d\mathbf{T}$ ја претставува промената на соодветниот елемент од набљудуваниот координатен систем \mathbf{T} . Така, елементот dp_x означува дека координатниот систем се придвижил за dp_x единици долж x -оската, додека елементот da_z означува дека има промена од da_z единици во a_z компонентата на векторот \mathbf{a} .

Диференцијалниот оператор Δ дефиниран со (3.18) е изведен во однос на референтниот координатен систем и фактички е $^U\Delta$ оператор. Меѓутоа, може да се дефинира и оператор во однос на подвижниот координатен систем $^T\Delta$. Тогаш, за да се определат промените во подвижниот координатен систем, неговата матрица \mathbf{T} треба да се помножи од десно со диференцијалниот оператор $^T\Delta$. Бидејќи се работи за исти промени, добиениот резултат е ист како и кога матрицата \mathbf{T} се множи од лево со диференцијалниот оператор $^U\Delta$:

$$d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot {}^T\Delta \quad (3.20)$$

Диференцијалниот оператор во однос на подвижниот координатен систем $^T\Delta$ е даден со изразот:

$${}^T\Delta = \mathbf{T}^{-1} \cdot \Delta \cdot \mathbf{T} \quad (3.21)$$

и може да се претстави во ист облик како и диференцијалниот оператор $^U\Delta$:

$${}^T\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -{}^T\delta_z & {}^T\delta_y & {}^Tdx \\ {}^T\delta_z & 0 & -{}^T\delta_x & {}^Tdy \\ -{}^T\delta_y & {}^T\delta_x & 0 & {}^Tdz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Под претпоставка дека подвижниот координатен систем \mathbf{T} е зададен со матрицата:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

елементите на диференцијалниот оператор ${}^T\Delta$ се дадени со изразите:

$${}^T\delta_x = \delta \cdot \mathbf{n}$$

$${}^T\delta_y = \delta \cdot \mathbf{o}$$

$${}^T\delta_z = \delta \cdot \mathbf{a}$$

$${}^T dx = \mathbf{n} \cdot [(\delta \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}]$$

$${}^T dy = \mathbf{o} \cdot [(\delta \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}]$$

$${}^T dz = \mathbf{a} \cdot [(\delta \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}] \quad (3.24)$$

каде што $\mathbf{d} = (dx, dy, dz)$ е вектор на диференцијалните транслации, $\delta = (\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ е вектор на диференцијалните ротации, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ е вектор на почетната позиција на подвижниот координатен систем.

Јакобијанот на една роботска рака со n степени слобода на движење се пресметува на следниот начин. Нека набљудуваната роботска рака има n краци и нека со q_1, q_2, \dots, q_n се означени променливите на нејзините зглобови. Ако i е транслаторен зглоб, $q_i = d_i$ е растојание; кога i е ротационен зглоб, $q_i = \theta_i$ е агол. Положбата на оваа роботска рака во просторот е одредена со нејзината трансформациона матрица:

$${}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

каде што $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ е вектор на променливите на зглобовите од роботската рака, $\{n\}$ е координатниот систем придружен со извршниот елемент од раката, додека $\{0\}$ е координатниот систем придружен со основата од роботската рака. Матрицата ${}^0\mathbf{T}_n$ всушност ја дефинира трансформацијата на координатниот систем $\{n\}$ во координатниот систем $\{0\}$ и може да се запише и на следниот начин:

$${}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n(\mathbf{q}) & {}^0\mathbf{P}_n(\mathbf{q}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

каде што матрицата ${}^o\mathbf{R}_n(\mathbf{q})$ ја дефинира ориентацијата на координатниот систем $\{n\}$ во однос на координатниот систем $\{0\}$, односно ориентацијата на роботската рака во однос на нејзината основа, додека векторот ${}^o\mathbf{P}_n(\mathbf{q})$ ја задава положбата на координатниот почеток P од координатниот систем $\{n\}$ во однос на координатниот систем $\{0\}$, односно позицијата на роботската рака во просторот во однос на нејзината основа. Кога набљудуваната роботска рака се движи во просторот, \mathbf{q} , ${}^o\mathbf{R}_n(\mathbf{q})$ и ${}^o\mathbf{P}_n(\mathbf{q})$ се функции од времето. Со други зборови, при нејзиното движење, позицијата и ориентацијата на роботската рака во просторот се менуваат со текот на времето.

Ако со ${}^o\mathbf{v}_n$ се означи **векторот на линеарната брзина** на роботската рака, а со ${}^o\boldsymbol{\omega}_n$ - **векторот на нејзината аглова брзина**, нивната зависност од брзината на зглобовите на роботската рака може да се изрази на следниот начин:

$${}^o\mathbf{v}_n = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}} \quad (3.27)$$

$${}^o\boldsymbol{\omega}_n = \mathbf{J}_\omega \dot{\mathbf{q}} \quad (3.28)$$

каде што матрицата \mathbf{J}_v има димензија $3 \times n$ и се нарекува **Јакобијан на линеарната брзина** на набљудуваната роботска рака, додека матрицата \mathbf{J}_ω , која има исто така димензија $3 \times n$, се нарекува **Јакобијан на агловата брзина** на роботската рака; $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_n]^T$ е векторот на брзините на зглобовите од роботската рака. Со обединување на релациите (3.27) и (3.28), се добива:

$$\begin{bmatrix} {}^o\mathbf{v}_n \\ {}^o\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.29)$$

Одредувањето на Јакобијанот на една роботска рака е едноставно, ако е позната директната кинематика на раката, бидејќи сè што е потребно се соодветните трансформациони матрици ${}^o\mathbf{T}_i$; $i = 1, 2, \dots, n$. Така, Јакобијанот на линеарната брзина на раката се добива со диференцирање на векторот ${}^o\mathbf{P}_n(\mathbf{q})$ по времето. Притоа, ако со \mathbf{J}_{v_i} се означат колоните од матрицата \mathbf{J}_v , ќе важи:

$$\mathbf{J}_{v_i} = \frac{\partial {}^o\mathbf{P}_n}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.30)$$

па може да се напише:

$$\mathbf{J}_v = [\mathbf{J}_{v_1} \quad \mathbf{J}_{v_2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{J}_{v_n}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^o \mathbf{P}_n}{\partial q_1} & \frac{\partial {}^o \mathbf{P}_n}{\partial q_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial {}^o \mathbf{P}_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Одредувањето на Јакобијанот на агловата брзина на една роботска рака \mathbf{J}_ω не е така едноставно како одредувањето на Јакобијанот на линеарната брзина \mathbf{J}_v , бидејќи \mathbf{J}_ω не претставува извод од ниедна конкретна величина на роботската рака. Ако со \mathbf{J}_{ω_i} се означат колоните од матрицата \mathbf{J}_ω , тогаш може да се запише:

$$\mathbf{J}_\omega = [\mathbf{J}_{\omega_1} \quad \mathbf{J}_{\omega_2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{J}_{\omega_n}] = [\rho_1 {}^o \mathbf{z}_0 \quad \rho_2 {}^o \mathbf{z}_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \rho_n {}^o \mathbf{z}_{n-1}] \quad (3.32)$$

каде што $\rho_i (i=1,2,\dots,n)$ има вредност 1, доколку се работи за ротационен зглоб, односно вредност 0, доколку се работи за транслаторен зглоб (транслаторните зглобови не можат да вршат ротационо движење, па немаат аглова брзина), а векторот ${}^o \mathbf{z}_{i-1}$ го чинат првите три елементи од третата колона на соодветната матрица ${}^o \mathbf{T}_{i-1}$, со тоа што ${}^o \mathbf{z}_0 = (0,0,1)$.

Освен во однос на референтниот координатен систем, Јакобијанот на една роботска рака може да се определи и во однос на кој и да било друг координатен систем придружен со нејзините зглобови. Така, брзината на една роботска рака со шест степени слобода на движење во однос на последниот координатен систем е дадена со формулата:

$${}^T_6 \mathbf{D} = {}^T_6 \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} {}^T_6 dx \\ {}^T_6 dy \\ {}^T_6 dz \\ {}^T_6 \delta x \\ {}^T_6 \delta y \\ {}^T_6 \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^T_6 J_{11} & {}^T_6 J_{12} & {}^T_6 J_{13} & {}^T_6 J_{14} & {}^T_6 J_{15} & {}^T_6 J_{16} \\ {}^T_6 J_{21} & {}^T_6 J_{22} & {}^T_6 J_{23} & {}^T_6 J_{24} & {}^T_6 J_{25} & {}^T_6 J_{26} \\ {}^T_6 J_{31} & {}^T_6 J_{32} & {}^T_6 J_{33} & {}^T_6 J_{34} & {}^T_6 J_{35} & {}^T_6 J_{36} \\ {}^T_6 J_{41} & {}^T_6 J_{42} & {}^T_6 J_{43} & {}^T_6 J_{44} & {}^T_6 J_{45} & {}^T_6 J_{46} \\ {}^T_6 J_{51} & {}^T_6 J_{52} & {}^T_6 J_{53} & {}^T_6 J_{54} & {}^T_6 J_{55} & {}^T_6 J_{56} \\ {}^T_6 J_{61} & {}^T_6 J_{62} & {}^T_6 J_{63} & {}^T_6 J_{64} & {}^T_6 J_{65} & {}^T_6 J_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\theta_5 \\ d\theta_6 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

каде што ${}^T_6 \mathbf{D}$ се диференцијални движења на раката во однос на последниот координатен систем \mathbf{T}_6 , а ${}^T_6 \mathbf{J}$ е Јакобијанот на раката во однос на истиот координатен систем, кој се пресметува на следниот начин. Ако зглобот i е ротационен зглоб, тогаш елементите на Јакобијанот ${}^T_6 \mathbf{J}$ се дадени со изразите:

$$\begin{aligned}
 T_6 J_{1i} &= -n_x p_y - n_y p_x \\
 T_6 J_{2i} &= -o_x p_y + o_y p_x \\
 T_6 J_{3i} &= -a_x p_y + a_y p_x \\
 T_6 J_{4i} &= n_z \\
 T_6 J_{5i} &= o_z \\
 T_6 J_{6i} &= a_z
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Доколку, пак, зглобот i е призматичен зглоб, елементите на Јакобијанот $T_6 \mathbf{J}$ се пресметуваат според формулите:

$$\begin{aligned}
 T_6 J_{1i} &= n_z \\
 T_6 J_{2i} &= o_z \\
 T_6 J_{3i} &= a_z \\
 T_6 J_{4i} &= 0 \\
 T_6 J_{5i} &= 0 \\
 T_6 J_{6i} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Во равенките (3.34) и (3.35) за i –тата колона се усвојуваат елементите од матрицата ${}^{i-1}\mathbf{T}_6$:

$$i = 1: {}^0\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6$$

$$i = 2: {}^1\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6$$

$$i = 3: {}^2\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6$$

$$i = 4: {}^3\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6$$

$$i = 5: {}^4\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_5\mathbf{A}_6$$

$$i = 6: {}^5\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_6 \quad (3.36)$$

Помеѓу Јакобијанот и диференцијалниот оператор на една роботска рака може да се воспостави следната врска. За дадени диференцијални движења на зглобовите \mathbf{D}_q , доколку е познат Јакобијанот на роботската рака, може да се пресмета матрицата \mathbf{D} , која ги содржи вредностите за диференцијалните движења на раката $dx, dy, dz, \delta x, \delta y, \delta z$. Со помош на овие вредности се пресметува диференцијалниот оператор на раката Δ , преку кој се пресметува диференцијалната промена $d\mathbf{T}$ на координатниот систем на роботската рака \mathbf{T} . Матрицата $d\mathbf{T}$ овозможува да се пресмета новата положба на координатниот систем придружен со раката, предизвикана од диференцијалните движења во нејзините зглобови. Алтернативно, преку Јакобијанот ${}^T_6\mathbf{J}$ може да се пресмета векторот ${}^T_6\mathbf{D}$, чии елементи се диференцијалните движења на раката во однос на подвижниот координатен систем \mathbf{T}_6 : ${}^T_6 dx, {}^T_6 dy, {}^T_6 dz, {}^T_6 \delta x, {}^T_6 \delta y, {}^T_6 \delta z$. Со помош на овие вредности, се пресметува диференцијалниот оператор ${}^T_6\Delta$, а преку него повторно може да се определи матрицата $d\mathbf{T}$.

За да можат да се определат диференцијалните движења или брзините во зглобовите на роботската рака, кои се неопходни да се постигне саканото диференцијално движење на раката, потребно е да се реши равенката (3.1), која претпоставува одредување на инверзната матрица кон Јакобијанот на роботот:

$$\mathbf{D}_q = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{D} \quad (3.37)$$

Слично:

$$\mathbf{D}_q = \left({}^T_6\mathbf{J} \right)^{-1} \cdot {}^T_6\mathbf{D}$$

Постојат два начини за определување на инверзниот Јакобијан на еден робот. Еден начин е, најнапред, да се определи општ израз за инверзниот Јакобијан и, потоа, во него да се воведат конкретните вредности. Втор начин е, најнапред, да се пресмета самиот Јакобијан и, потоа, да се најде неговата инверзна матрица. И двата се многу сложени, обемни и долготрајни. Заради тоа, брзините на зглобовите на една роботска рака се определуваат од кинематските равенки на раката. Така, за диференцијалното движење $d\theta_1$ се добива:

$$d\theta_1 = \frac{-S_1 dp_x + C_1 dp_y}{p_x C_1 + p_y S_1} \quad (3.38)$$

$$(d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4) = \frac{S_{234} [S_1 a_x d\theta_1 - C_1 da_x - C_1 a_y d\theta_1 - S_1 da_y] + C_{234} da_z}{C_{234} (C_1 a_x + S_1 a_y) + S_{234} a_z} \quad (3.39)$$

Диференцијалното движење $d\theta_3$ се добива од изразот:

$$\begin{aligned} -2a_2 a_3 S_3 d\theta_3 &= 2(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4) [C_1 dp_x - p_x S_1 d\theta_1 + S_1 dp_y + p_y C_1 d\theta_1 + \\ &+ a_4 S_{234} (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4)] + 2(p_z - S_{234} a_4) [dp_z - a_4 C_{234} (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4)] \end{aligned} \quad (3.40)$$

која, без оглед на нејзината должина, може да се реши во однос на непознатата $d\theta_3$, зошто сите останати елементи во неа се веќе познати. Диференцијалното движење $d\theta_4$ се добива како решение на равенката:

$$\begin{aligned} C_2 d\theta_2 [(a_3 C_3 + a_2)^2 + S_3^2 a_3^2] + S_2 [2(a_3 C_3 + a_2)(-a_3 S_3 d\theta_3) + 2S_3 C_3 a_3^2 d\theta_3] = \\ = -a_3 S_3 d\theta_3 (p_z - S_{234} a_4) + (C_3 a_3 + a_2) [dp_z - a_4 C_{234} (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4)] - \\ - a_3 C_3 d\theta_3 (p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4) - S_3 a_3 [C_1 dp_x - p_x S_1 d\theta_1 + S_1 dp_y + p_y C_1 d\theta_1 + \\ + a_4 S_{234} (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4)] \end{aligned} \quad (3.41)$$

диференцијалното движење $d\theta_5$ се определува од:

$$-S_5 d\theta_5 = S_1 a_y d\theta_1 - C_1 da_y + C_1 a_x d\theta_1 + S_1 da_x \quad (3.42)$$

а диференцијалното движење $d\theta_6$ се добива од равенката:

$$\begin{aligned} C_6 d\theta_6 &= -C_{234} (C_1 n_x + S_1 n_y) (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4) - \\ &- S_{234} (-S_1 n_x d\theta_1 + C_1 dn_x + C_1 n_y d\theta_1 + S_1 dn_y) - \\ &- S_{234} n_z (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4) + C_{234} dn_z \end{aligned} \quad (3.43)$$

Како што може да се забележи, постојат шест диференцијални равенки од кои се пресметуваат диференцијалните движења на зглобовите на набљудуваната роботска рака. Со помош на нив можат да се определат брзините во зглобовите од раката. Во пракса, овие шест диференцијални равенки и нивните решенија се програмираат во роботскиот управувачки дел, со што му е овозможено на управувачкиот орган на роботот брзо да ги пресметува

потребните брзини на зглобовите од роботската рака и успешно да го движи роботот.

Јакобијанот \mathbf{J} на една роботска рака, кој има димензии $6 \times n$, го дефинира пресликувањето

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{J}] \cdot [\dot{\mathbf{q}}] \quad (3.44)$$

помеѓу векторот $\dot{\mathbf{q}}$ на брзините на зглобовите и векторот $\mathbf{v} = [\mathbf{v}^{Tr} \quad \boldsymbol{\omega}^{Tr}]^{Tr}$ на брзините на раката. Тоа значи дека брзините на раката претставуваат линеарна комбинација од колоните на нејзиниот Јакобијан:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{J}_n] \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1 \dot{q}_1 + \mathbf{J}_2 \dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{J}_n \dot{q}_n \quad (3.45)$$

Бидејќи векторот \mathbf{v} има димензија 6×1 , односно $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}^6$, за роботската рака да може да оствари произволна брзина, потребно е нејзиниот Јакобијан да има шест линеарно независни колони. Од друга страна, рангот на една матрица е еднаков со бројот линеарно независни колони (или редици) на таа матрица. Следствено, една роботска рака може да оствари произволна брзина на движење доколку нејзиниот Јакобијан има ранг еднаков на 6.

Рангот на една матрица не мора секогаш да биде константен. Така, **рангот на Јакобијанот на една роботска рака зависи од нејзината конфигурација \mathbf{q}** . Конфигурациите за кои рангот на матрицата $\mathbf{J}(\mathbf{q})$, каде што $\text{rang} \mathbf{J} \leq \min(6, n)$ за матрица $\mathbf{J} \in \mathfrak{R}^{6 \times n}$, е помал од неговата максимална вредност се нарекуваат **сингуларитети** или **сингуларни конфигурации**.

- Сингуларитетите претставуваат конфигурации со кои роботската рака не може да оствари движење во одредени правци.
- При сингуларни конфигурации, ограничените по величина брзини на роботската рака можат да соодветствуваат на неограничени по величина брзини на зглобовите од раката.
- При сингуларни конфигурации, ограничените по величина вртливи моменти на зглобовите од роботската рака можат да соодветствуваат на неограничени по величина сили и вртливи моменти на раката.
- Сингуларитетите често соодветствуваат на граничните точки од работниот простор на раката.

- Сингуларитетите соодветствуваат на точки од работниот простор на роботската рака кои при мали отстапувања на параметрите на раката се недостапни.

Постојат повеќе начини за определување на сингуларитетите на Јакобијанот на една роботска рака. Имајќи на ум дека една квадратна матрица е сингуларна кога нејзината детерминанта е еднаква на нула, сингуларитетите на роботската рака можат да се определат од условот:

$$|\mathbf{J}| = \det \mathbf{J} = 0 \quad (3.46)$$



3.1. Положбата на една роботска рака во просторот е определена со матрицата:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Да се определи новата положба на роботската рака како резултат на диференцијална ротација околу z -оската за агол од 0.15 радијани и диференцијално транслаторно движење опишано со векторот $[0.1 \ 0.1 \ 0.3]^T$, во наведениот редослед.

Решение: Диференцијалната трансформација на зададената роботска рака претставува комбинација од сите извршени диференцијални транслации и ротации. Ако почетната положба на роботската рака се означи со \mathbf{T} , а нејзината промена како резултат од зададените диференцијални трансформации се означи со $d\mathbf{T}$, тогаш:

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T} \quad (3.48)$$

каде што $\mathbf{\Lambda}$ е диференцијален оператор кој се пресметува според формулата:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

па, промената $d\mathbf{T}$ на положбата од роботската рака во однос на референтниот координатен систем ќе биде:

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -0.15 & 0 & 0.1 \\ 0.15 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 0 & -0.95 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Новата положба на набљудуваната роботска рака \mathbf{T} се добива така што настанатите промени (3.50) ќе се додадат на првобитните вредности:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{нова}} = \mathbf{T} + d\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 0 & -0.95 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 1 & 1.05 \\ 1 & 0 & 0.15 & 7.4 \\ 0 & 1 & 0 & 5.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.2. Положбата на една роботска рака во просторот во однос на зададен референтен координатен систем е определена со трансформационата матрица:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Да се определи новата положба на роботската рака како резултат на диференцијална ротација околу z - оската за агол од 0.15 радијани и диференцијално транслаторно движење опишано со векторот $[0.05 \ 0.02 \ 0.01]^T$, во наведениот редослед.

Решение: Новата положба на набљудуваната роботска рака се добива како збир од почетната положба и нејзината промена настаната како резултат на извршените диференцијални движења $[0.05 \ 0.02 \ 0.01 \ 0 \ 0 \ 0.15]^T$:

$$\mathbf{T}_{\text{нова}} = \mathbf{T} + d\mathbf{T} = \mathbf{T} + \mathbf{\Delta T} = (\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{T} \quad (3.53)$$

Диференцијалниот оператор $\mathbf{\Lambda}$ се пресметува според формулата:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.15 & 0 & 0.05 \\ 0.15 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

па, за новата положба на набљудуваната роботска рака се добива:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{nova}} = \mathbf{T} + d\mathbf{T} = (\mathbf{I} + \Delta)\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 1 & -0.15 & 0 & 0.05 \\ 0.15 & 1 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0 & 1 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 1 & 3.75 \\ 1 & 0 & 0.15 & 2.62 \\ 0 & 1 & 0 & 1.01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Настанатата промена $d\mathbf{T}$ на положбата од роботската рака во однос на референтниот координатен систем е:

$$d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -0.15 & 0 & 0.05 \\ 0.15 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.62 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

3.3. Како резултат од низа последователни диференцијални движења, координатниот систем \mathbf{T} зададен со матрицата:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

се променил за $d\mathbf{T}$. Да се определат направените диференцијални промени $(dx, dy, dz, \delta x, \delta y, \delta z)$ и диференцијалниот оператор во однос на координатниот систем \mathbf{T} , ако:

$$d\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ -0.1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Решение: Бидејќи:

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{\Lambda} = d\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} \quad (3.59)$$

за диференцијалниот оператор $\mathbf{\Lambda}$ се добива:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ -0.1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ -0.1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.60) \end{aligned}$$

Оттука, набљудуваниот координатен систем ги извршил следните диференцијални движења:

- Транслација долж x -оската за 0.1 единици
- Ротација околу y -оската за агол од 0.1 радијани
- Ротација околу z -оската за агол од 0.1 радијани

односно:

$$[dx \ dy \ dz \ \delta x \ \delta y \ \delta z]^T = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1]^T \quad (3.61)$$

Диференцијалниот оператор $\mathbf{\Lambda}$, даден со (3.60), е пресметан во однос на референтниот координатен систем и со негова помош може да се пресмета бараниот диференцијален оператор во однос на координатниот систем \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

3.4. Нека, под претпоставка, координатниот систем \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

претрпел диференцијална translација опишана со векторот $\mathbf{d} = [1 \ 0 \ 0.5]^T$ проследена со диференцијална ротација опишана со векторот $\boldsymbol{\delta} = [0 \ 0.1 \ 0]^T$.

а) Да се определи диференцијалниот оператор во однос на референтниот координатен систем. б) Да се определи диференцијалниот оператор во однос на координатниот систем \mathbf{A} .

Решение: Диференцијалниот оператор Δ во однос на референтниот координатен систем e :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

додека за диференцијалниот оператор во однос на координатниот систем \mathbf{A} се добива:

$$\begin{aligned}
 {}^{\mathbf{A}}\Delta &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \Delta \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.65}
 \end{aligned}$$

3.5. Дадени се координатниот систем на една роботска рака и соодветниот Јакобијан. За дадени диференцијални промени во зглобовите, да се определи промената во координатниот систем на раката, неговата нова положба и соодветниот диференцијален оператор.

$$\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$${}^T_6 \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{D}_\theta = [0 \quad 0.1 \quad -0.1 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0]^t \quad (3.68)$$

Решение:

$$\mathbf{D} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_\theta = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \\ 1 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Врз основа на пресметаните диференцијални движења, за диференцијалниот оператор Δ се добива:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Оттука, промената на положбата на набљудуваната роботска рака изнесува:

$$d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.1 \\ 0.3 & -0.2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

а нејзината нова положба ќе биде:

$$\mathbf{T}_{nova} = \mathbf{T} + d\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.1 \\ 0.3 & -0.2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.2 & 10 \\ 1 & 0 & 0.3 & 4.9 \\ 0.3 & -0.2 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

3.6. Нека положбата на една роботска рака во просторот во однос на референтниот координатен систем е дадена со матрицата \mathbf{T} . Раката претрпела диференцијално транслаторно придвижување долж x -оската за 0.5 единици и долж z -оската за 1 единица, проследено со диференцијално ротационо движење околу y -оската за агол од $0.2rad$. Да се пресмета новата положба на раката во однос на референтниот координатен систем. Колку изнесува диференцијалниот оператор Δ во однос на референтниот координатен систем? Колку изнесува диференцијалниот оператор ${}^T\Delta$ во однос на координатниот систем \mathbf{T} ? Да се провери резултатот за ${}^T\Delta$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Решение: Новата положба на роботската рака во просторот е определена со почетната положба и соодветната промена:

$$\mathbf{T}_{nova} = \mathbf{T} + d\mathbf{T} \quad (3.74)$$

$$d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} \quad (3.75)$$

$$\Delta = \mathbf{T}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(y, \delta y) - \mathbf{I} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{T}(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}(0.5, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{R}(y, \delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}(y, 0.1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\Delta = \mathbf{T}(0.5, 0, 1) \times \mathbf{R}(y, 0.2) - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{T}_{nova} = \mathbf{T} + d\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 1 & 1.5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$${}^T \Delta = \mathbf{T}^{-1} \cdot \Delta \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Проверка:

$$d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot {}^T \Delta \quad (3.83)$$

3.7. Нека почетната позиција и ориентација на една роботска рака во просторот е дадена со \mathbf{T}_1 , а нејзината нова позиција и ориентација во просторот, по извршената промена, е дефинирана со \mathbf{T}_2 :

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 4.8 \\ 0.1 & 0 & -1 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & 6.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

(а) Да се определи трансформациона матрица \mathbf{Q} со која ќе може да се реализира дефинираната промена на позицијата и ориентацијата во просторот на набљудуваната роботска рака.

(б) Под претпоставка дека промените се мали, да се определи соодветниот диференцијален оператор.

(в) Да се дефинира диференцијалната транслација и диференцијалната ротација кои го сочинуваат диференцијалниот оператор определен под (б).

Решение: (а)

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_1 \Rightarrow$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 4.8 \\ 0.1 & 0 & -1 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & 6.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 4.8 \\ 0.1 & 0 & -1 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & 6.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.86) \end{aligned}$$

(б)

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 + d\mathbf{T} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 4.8 \\ 0.1 & 0 & -1 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & 6.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T}_1 &\Rightarrow \\
 \Delta = d\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_1^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

(B)

$$\Delta = \mathbf{T}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(k, d\theta) - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\delta x = 0, \delta y = 0, \delta z = 0.1, dx = 0.1, dy = 0, dz = 0.2 \quad (3.88)$$

Следствено, промената на положбата на набљудуваниот координатен систем во просторот е остварена со елементарна ротација околу z-оската за агол од 0.1 радијани и елементарни транслации долж x-оската и z-оската за 0.1 и 0.2 единици, соодветно:

$$\mathbf{T}(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(k, d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

II начин: а) За набљудуваната роботска рака важи:

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_1 \Rightarrow \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_1^{-1} \Rightarrow \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{Q} \quad (3.90)$$

Оттука:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 4.8 \\ 0.1 & 0 & -1 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & 6.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

б) Од друга страна:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1 + d\mathbf{T} = [\mathbf{T}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(k, d\theta)] \cdot \mathbf{T}_1 \Rightarrow \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{T}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(k, d\theta) \end{aligned} \quad (3.92)$$

па, за бараниот диференцијален оператор се добива:

$$\Delta = \mathbf{T}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(k, d\theta) - \mathbf{I} = \mathbf{Q} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Во изразот (3.93) \mathbf{I} претставува единична квадратна матрица.

в) Врз основа на резултатот (3.93) се заклучува дека набљудуваната роботска рака ги извршила следните диференцијални движења:

- диференцијална ротација околу z – оската за 0.1 радијани
- диференцијална translација долж x – оската за 0.1 единици
- диференцијална translација долж z – оската за 0.2 единици

3.8. Да се изведат равенките кои го опишуваат диференцијалното движење на еден цилиндричен робот и да се определи соодветниот Јакобијан.

Решение: Со диференцирање на првите три елементи од третата колона на матрицата:

$$\mathbf{T}_{cyl} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

во однос на променливите на зглобовите r, α, l се добива:

$$\dot{x} = C\alpha \dot{r} - rS\alpha \dot{\alpha}$$

$$\dot{y} = S\alpha\dot{r} + rC\alpha\dot{\alpha}$$

$$\dot{z} = \dot{l} \tag{3.95}$$

па бараниот Јакобијан е:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial l} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial l} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha & -rS\alpha & 0 \\ S\alpha & rC\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.96}$$

3.9. Роботска рака дефинирана во сферен координатен систем остварува произволна позиција во просторот преку следните последователни движења: транслација за r единици долж z -оската, ротација за агол β околу y -оската и ротација за агол γ околу z -оската. Да се определат нејзините сингуларитети.

Решение: Матрицата на трансформација која ја дефинира положбата на координатниот почеток P од координатниот систем придружен со роботската рака во однос на референтниот координатен систем претставува производ од матриците на одделните движења во обратен редослед:

$$\begin{aligned} {}^U\mathbf{T}_P &= \mathbf{T}_{sph}(r, \beta, \gamma) = \mathbf{R}(z, \gamma) \cdot \mathbf{R}(y, \beta) \cdot \mathbf{T}(0,0, r) = \\ &= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & S\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C\beta \cdot S\gamma & C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.97} \end{aligned}$$

Првите три колони во (3.97) ја претставуваат просторната ориентација на координатниот систем придружен со раката, а последната колона ја претставува положбата на координатниот почеток од овој координатен систем. Очигледно, ориентацијата на координатниот систем придружен со роботската рака се менува како резултат од ротацијата околу y -оската и z -оската.

Со диференцирање на првите три елементи од третата колона на матрицата (3.97) во однос на променливите на зглобовите r, β, γ се добива:

$$\dot{x} = S\beta C\gamma\dot{r} + rC\beta C\gamma\dot{\beta} - rS\beta S\gamma\dot{\gamma} \quad (3.98)$$

$$\dot{y} = S\beta S\gamma\dot{r} + rC\beta S\gamma\dot{\beta} + rS\beta C\gamma\dot{\gamma} \quad (3.99)$$

$$\dot{z} = C\beta\dot{r} - rS\beta\dot{\beta} \quad (3.100)$$

па бараниот Јакобијан е:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\beta C\gamma & rC\beta C\gamma & -rS\beta S\gamma \\ S\beta S\gamma & rC\beta S\gamma & rS\beta C\gamma \\ C\beta & -rS\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Нејзините сингуларитети се добиваат како решенија на равенката:

$$\det \mathbf{J} = \begin{vmatrix} S\beta C\gamma & rC\beta C\gamma & -rS\beta S\gamma \\ S\beta S\gamma & rC\beta S\gamma & rS\beta C\gamma \\ C\beta & -rS\beta & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (3.102)$$

и тие настапуваат за вредностите $\beta = k\pi; k = 0, 1, 2, \dots$

3.10. Дадени се D-Н параметрите на една роботска рака. Да се нацрта почетната положба на раката. Потоа да се пресмета нејзиниот Јакобијан.

Таблица 3.1. D-Н параметри на роботската рака од Задачата 3.10

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	d_1	0	-90^0
2	0	d_2	0	90^0
3	θ_3	0	a_3	0

Решение: Почетната положба на раката е прикажана на Слика 3.2.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

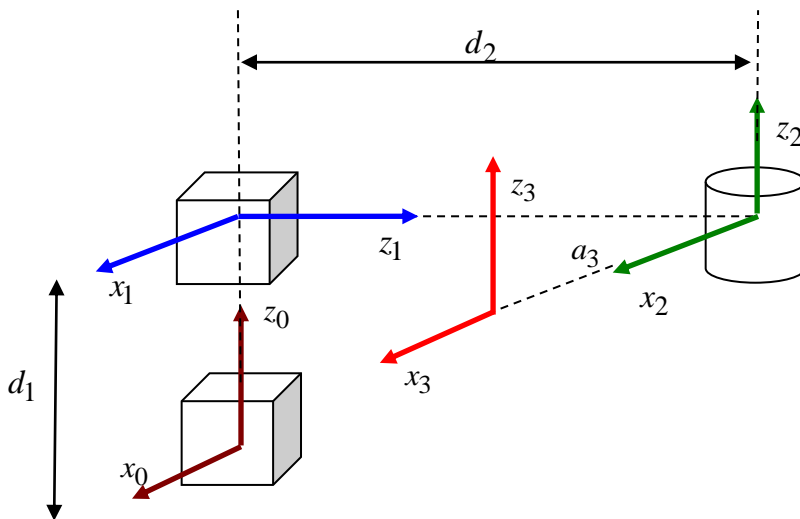
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 + d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$



Слика 3.2. Почетна положба на набљудуваната роботска рака

$$x = a_3 C_3$$

$$y = a_3 S_3 + d_2$$

$$z = d_1$$

$$\dot{x} = -a_3 S_3 \dot{\theta}_3$$

$$\dot{y} = a_3 C_3 \dot{\theta}_3 + \dot{d}_2$$

$$\dot{z} = \dot{d}_1$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial d_1} & \frac{\partial x}{\partial d_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial d_1} & \frac{\partial y}{\partial d_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial d_1} & \frac{\partial z}{\partial d_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 S_3 \\ 0 & 1 & a_3 C_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

3.11. Една роботска рака со два степени слобода на движење е опишана со следните трансформации:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & a_1 C_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & a_1 S_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & a_1 C_1 - d_2 S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & a_1 S_1 + d_2 C_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Да се определи нејзиниот Јакобијан.

Решение: Јакобијанот на дадената роботска рака може да се претстави на следниот начин:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

каде што Јакобијанот на линеарната брзина \mathbf{J}_v е:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial d_2} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

\mathbf{P} е векторот на позиција на набљудуваната роботска рака:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 - d_2 S_1 \\ a_1 S_1 + d_2 C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

и со негово диференцирање по времето, за \mathbf{J}_v се добива:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - d_2 C_1 & -S_1 \\ a_1 C_1 - d_2 S_1 & C_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

Од друга страна, Јакобијанот на агловата брзина \mathbf{J}_ω се пресметува на следниот начин:

$$\mathbf{J}_\omega = [\mathbf{J}_{\omega_1} \quad \mathbf{J}_{\omega_2}] \quad (3.116)$$

каде што:

$$\mathbf{J}_{\omega_i} = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1} & \text{за ротационен зглоб} \\ 0 & \text{за призматичен зглоб} \end{cases} \quad (3.117)$$

Во конкретниот случај:

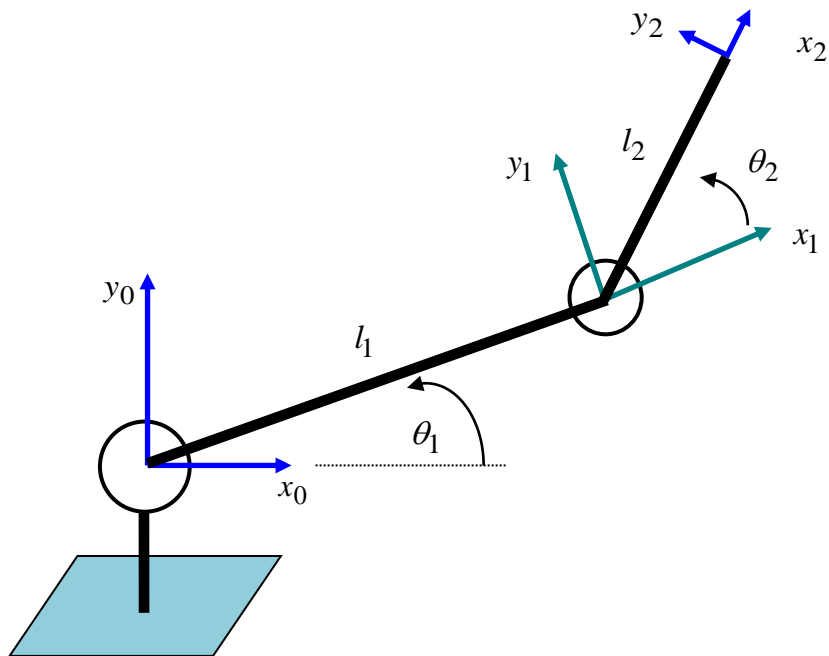
$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

па, бараниот Јакобијан ќе биде:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - d_2 C_1 & -S_1 \\ a_1 C_1 - d_2 S_1 & C_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

3.12. Да се определи Јакобијанот на роботската рака од Слика 3.3 во однос на референтниот координатен систем $O_0(x_0, y_0, z_0)$. Притоа, z -оските на соодветните координатни системи се нормални на рамнината на листот и насочени надвор од листот.



Слика 3.3. Илустрација кон Задача 3.12

Решение: D-H параметрите на роботската рака од Слика 3.3, која има два ротациони зглоба, се дадени во Таблицата 3.2.

Таблица 3.2. D-H параметри на роботската рака од Слика 3.3

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0

Врз основа на нив се пресметуваат матриците \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \mathbf{R}(z, \theta_1) \mathbf{Trans}(0, 0, d_1) \mathbf{Trans}(l_1, 0, 0) \mathbf{R}(x, \alpha_1) = \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.121}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_2 &= \mathbf{R}(z, \theta_2) \mathbf{Trans}(0, 0, d_2) \mathbf{Trans}(l_2, 0, 0) \mathbf{R}(x, \alpha_2) = \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.122}
 \end{aligned}$$

Соодветните \mathbf{T} матрици се:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.123}$$

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.124}$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = {}^0\mathbf{T}_1 \cdot {}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

Првите три елементи од последната колона во матрицата ${}^0\mathbf{T}_2$ ги претставуваат x , y и z координатите на координатниот почеток O_2 од координатниот систем $O_2(x_2, y_2, z_2)$ во однос на референтниот координатен систем $O_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x_2 = l_1 C_1 + l_2 C_{12} \quad (3.126)$$

$$y_2 = l_1 S_1 + l_2 S_{12} \quad (3.127)$$

$$z_2 = 0 \quad (3.128)$$

додека ротациониот дел од ${}^0\mathbf{T}_2$:

$${}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

ја дефинира ориентацијата на подвижниот координатен систем $O_2(x_2, y_2, z_2)$ во однос на референтниот координатен систем $O_0(x_0, y_0, z_0)$.

Јакобијанот на набљудуваната роботска рака секогаш може да се претстави на следниот начин:

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

каде што:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

додека \mathbf{J}_ω ја претставува зависноста на агловата брзина на координатниот систем $O_2(x_2, y_2, z_2)$ од брзината на зглобовите на роботската рака во однос на референтниот координатен систем $O_0(x_0, y_0, z_0)$. Бидејќи ротацијата на координатниот систем $O_2(x_2, y_2, z_2)$ во конкретниот случај претставува едноставно ротација околу z_2 - оската со брзина $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$:

$$\mathbf{J}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

Следствено:

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

3.13. D-H параметрите на една роботска рака се дадени во долната таблица. Да се нацрта раката во почетната положба ($\theta_2 = \theta_3 = 0$). Потоа да се определи нејзиниот Јакобијан и сингуларните точки.

D-H параметри на роботската рака од Задача 3.13

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	d_1	0	$+90^0$
2	θ_2	0	a_2	-90^0
3	θ_3	0	a_3	0^0

Решение: Зададената роботска рака е прикажана на Слика 3.4, а нејзината директна кинематика е опишана со трансформационите матрици:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

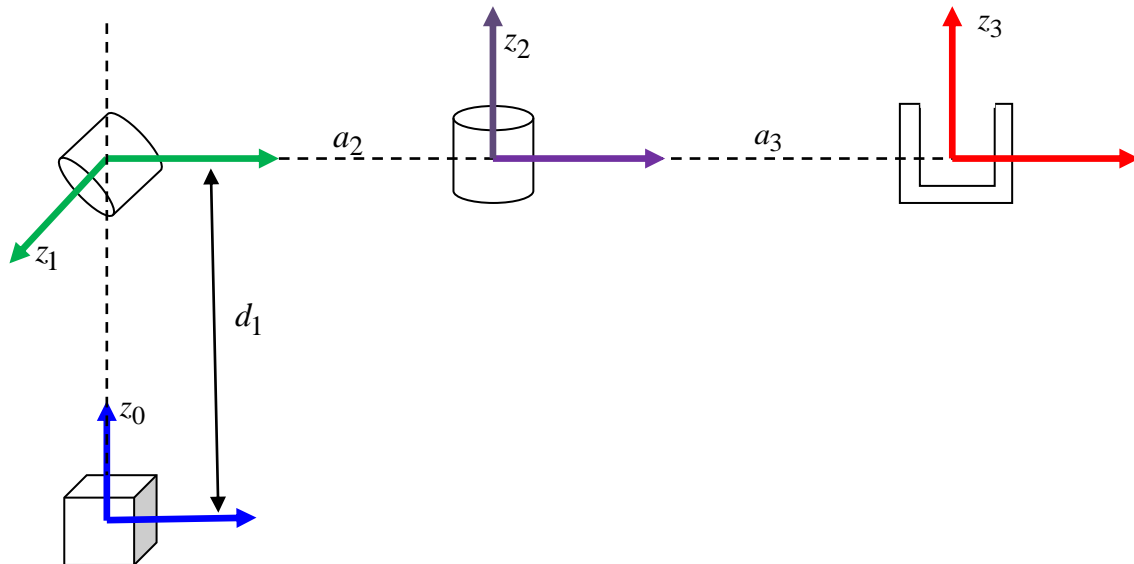
$${}^0\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2 C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2 S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2C_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2S_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2C_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2S_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_2C_3 & -C_2S_3 & -S_2 & a_3C_2C_3 + a_2C_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3S_3 \\ S_2C_3 & -S_2S_3 & C_2 & a_3S_2C_3 + a_2S_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

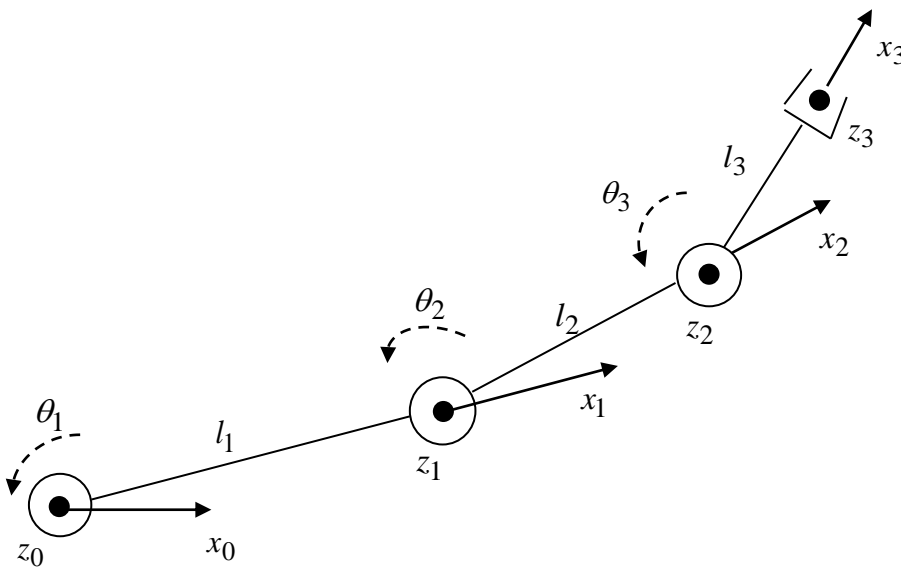


Слика 3.4.Роботската рака од Задачата 3.13

Оттука, нејзиниот Јакобијан ќе биде:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial d_1} & \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{24}}{\partial d_1} & \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{24}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{24}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial d_1} & \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial d_1} & \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_3} \\ 0 & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_1 \end{pmatrix}_{13} & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_2 \end{pmatrix}_{13} \\ 0 & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_1 \end{pmatrix}_{23} & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_2 \end{pmatrix}_{23} \\ 1 & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_1 \end{pmatrix}_{33} & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_2 \end{pmatrix}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 S_2 - a_3 S_2 C_3 & -a_3 C_2 S_3 \\ 0 & 0 & a_3 C_3 \\ 1 & a_2 C_2 + a_3 C_2 C_3 & -a_3 S_2 S_3 \\ 0 & 0 & -S_2 \\ 0 & -1 & C_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

3.14. Да се определи Јакобијанот на рамнинска роботска рака со три степени слобода на движење, прикажана на долната слика.



Слика 3.5. RRR роботска рака од Задача 3.14

Решение: Роботската рака од Сликата 3.5 се состои од три ротациони зглоба, означени како зглоб 1, зглоб 2 и зглоб 3, и три крака со должини l_1 , l_2 и l_3 , соодветно. Бидејќи зглобовите се ротациони, нивните променливи ќе

претставуваат агли на ротација и се означени со θ_1 , θ_2 и θ_3 , соодветно. Кон секој зглоб од раката е придружен локален координатен систем. Така, кон првиот зглоб од раката е придружен координатниот систем $\{0\} = \{x_0, y_0, z_0\}$, кон вториот зглоб е придружен координатниот систем $\{1\} = \{x_1, y_1, z_1\}$, кон третиот зглоб е придружен координатниот систем $\{2\} = \{x_2, y_2, z_2\}$ и кон извршниот елемент од роботската рака е придружен координатниот систем $\{3\} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Оските z_0 , z_1 и z_2 се поставени според правилото на десната рака во правецот на оската на ротација на зглобовите, додека оската z_3 е избрана произволно. Оските x_1 , x_2 и x_3 се поставени во правец на нормалата на соодветните соседни z -оски, додека оската x_0 е избрана произволно. (Оските што можат да се постават произволно обично се избираат така да се упростат математичките пресметки и записи.) За вака избрани локални координатни системи, D-H параметрите на дадената роботска рака се дадени во Таблицата 3.3.

Таблица 3.3. D-H параметри на роботската рака од Слика 3.5

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	0^0
2	θ_2	0	l_2	0^0
3	θ_3	0	l_3	0^0

Со помош на параметрите од горната таблица се пресметуваат матриците \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 и соодветните трансформациони матрици ${}^0\mathbf{T}_i$:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_2 &= ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.141)
 \end{aligned}$$

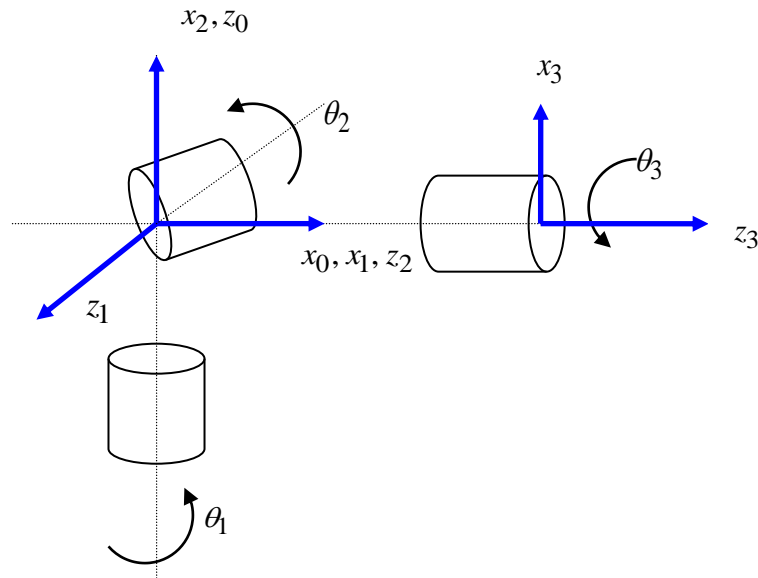
$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_3 &= ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1S_1 + l_2S_{12} + l_3S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.142)
 \end{aligned}$$

За бараниот Јакобијан на набљудуваната роботска рака се добива:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{24}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{24}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{24}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_3} \\ 0 & ({}^0\mathbf{T}_1)_{13} & ({}^0\mathbf{T}_2)_{13} \\ 0 & ({}^0\mathbf{T}_1)_{23} & ({}^0\mathbf{T}_2)_{23} \\ 1 & ({}^0\mathbf{T}_1)_{33} & ({}^0\mathbf{T}_2)_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1S_1 - l_2S_{12} - l_3S_{123} & -l_2S_{12} - l_3S_{123} & -l_3S_{123} \\ l_1C_1 + l_2C_{12} + l_3C_{123} & l_2C_{12} + l_3C_{123} & l_3C_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.143)
 \end{aligned}$$

Притоа, $({}^0\mathbf{T}_i)_{jk}; i = 1,2,3; j, k = 1,2,3,4$ го претставува елементот во пресек на j -тата редица и k -колона од трансформационата матрица $({}^0\mathbf{T}_i); i = 1,2,3$.

3.15. Да се пресмета Јакобијанот на RRR роботска рака прикажана на Слика 3.6.



Слика 3.6. Илустрација на Задача 3.15 – RRR роботска рака

Решение: D-Н параметрите на дадената роботска рака се дадени во Таблицата 3.4.

Таблица 3.4. D-Н параметри на роботската рака од Слика 3.6

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	90^0
2	θ_2	0	0	90^0
3	θ_3	d_3	0	0^0

Со помош на овие D-Н параметри се пресметуваат матриците \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 и \mathbf{A}_3 :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

додека соодветните трансформациони матрици ${}^0\mathbf{T}_i$ се:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & S_1 & C_1 S_2 & d_2 S_1 \\ S_1 C_2 & -C_1 & S_1 S_2 & -d_2 C_1 \\ S_2 & 0 & -C_2 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

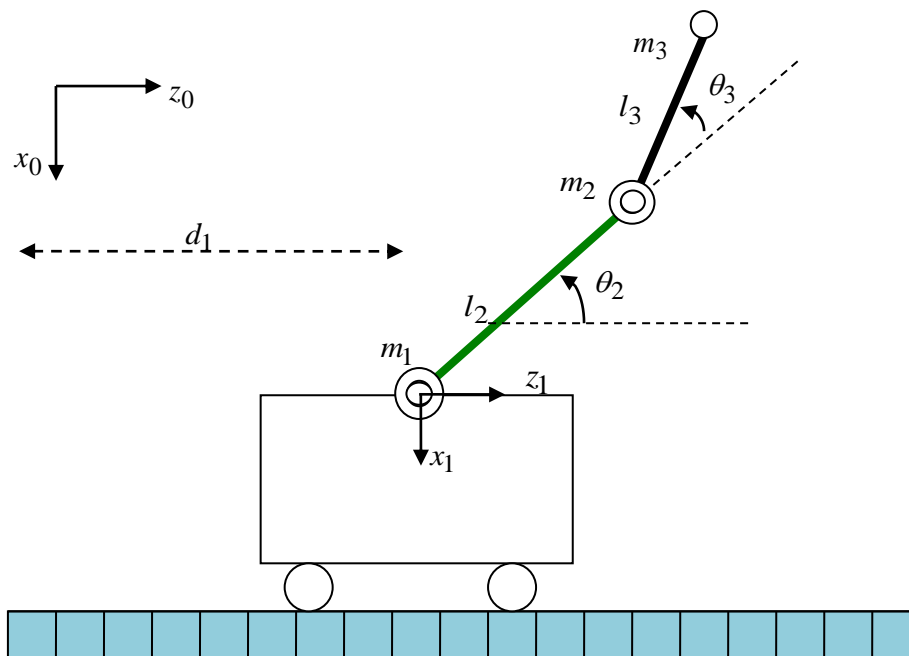
$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_3 &= ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3 & -C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3 & C_1 S_2 & C_1 S_2 d_3 + S_1 d_2 \\ S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3 & -S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 & S_1 S_2 & S_1 S_2 d_3 - C_1 d_2 \\ S_2 C_3 & -S_2 S_3 & -C_2 & -C_2 d_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.149)$$

Оттука, Јакобијанот на набљудуваната роботска рака ќе биде:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{24}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{24}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{24}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{34}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_3)_{14}}{\partial \theta_3} \\ 0 & ({}^0\mathbf{T}_1)_{13} & ({}^0\mathbf{T}_2)_{13} \\ 0 & ({}^0\mathbf{T}_1)_{23} & ({}^0\mathbf{T}_2)_{23} \\ 1 & ({}^0\mathbf{T}_1)_{33} & ({}^0\mathbf{T}_2)_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 & C_1 C_2 d_3 & 0 \\ C_1 S_2 d_3 + S_1 d_2 & S_1 C_2 d_3 & 0 \\ 0 & S_2 d_3 & 0 \\ 0 & S_1 & C_1 S_2 \\ 0 & -C_1 & S_1 S_2 \\ 1 & 0 & -C_2 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

3.16. Дадена е подвижната роботска рака од типот PRR прикажана на долната слика. Под претпоставка, m_1, m_2, m_3 се концентрирани маси во соодветните точки.



Слика 3.7. Илустрација кон Задача 3.16

а) Да се определи Јакобијанот на набљудуваната роботска рака во однос на референтниот координатен систем \mathbf{U} , кој ја определува врската помеѓу брзината на извршниот елемент и брзините на зглобовите од раката. Упатство: за работни координати да се усвојат x, z и $\alpha = \theta_2 + \theta_3$.

б) Да се определат сингуларитетите на роботската рака и да се даде нивното физичко толкување.

Решение: а) Задачата може да се реши геометриски. Така, врз основа на Слика 3.7, за x -координатата и z -координатата на извршниот елемент од роботската рака во однос на координатниот систем $\{0\}$ важи:

$$x = -l_2 \sin \theta_2 - l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) = -l_2 S_2 - l_3 S_{23} \quad (3.151)$$

$$z = d_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = d_1 + l_2 C_2 + l_3 C_{23} \quad (3.152)$$

а од условот на задачата:

$$\alpha = \theta_2 + \theta_3 \quad (3.153)$$

Со диференцирање на горните три равенки во однос на променливите на зглобовите d_1, θ_2, θ_3 се добива:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 - l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) = -l_2 C_2 \dot{\theta}_2 - l_3 C_{23}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{z} &= \dot{d}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 - l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) = \dot{d}_1 - l_2 S_2 \dot{\theta}_2 - l_3 S_{23}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{\alpha} &= \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (3.154)$$

а бараниот Јакобијан е:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial d_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial d_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial d_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -l_2 C_2 - l_3 C_{23} & -l_3 C_{23} \\ 1 & -l_2 S_2 - l_3 S_{23} & -l_3 S_{23} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

б) Сингуларитетите се јавуваат кога детерминантата на Јакобијанот е нула. Така, врз основа на резултатот (3.155):

$$\det \mathbf{J} = 0 \Rightarrow l_2 C_2 = 0 \quad (3.156)$$

Оттука:

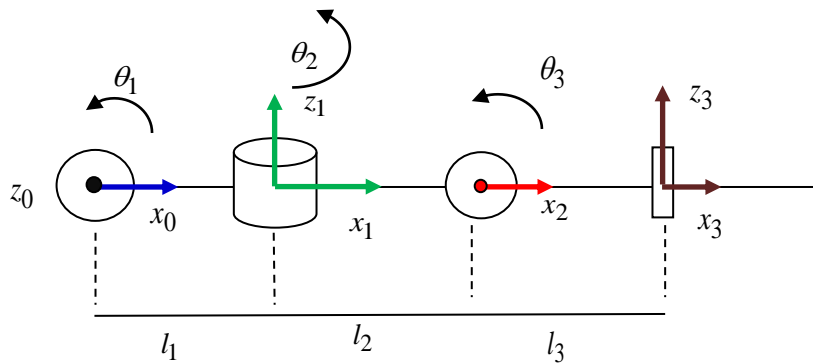
$$C_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = 90^0 \quad (3.157)$$

Сингуларитетот настапува кога $\theta_2 = 90^0$. Тогаш брзините \dot{x} и \dot{z} стануваат зависни. Исто така, за $\theta_2 = 90^0$ и $\theta_3 = 0^0$ не постои движење во правец на x -оската.

3.17. Дадена е RRR роботската рака прикажана на Слика 3.8. Под претпоставка, $l_1 = l_2 = l_3 = 1$.

а) Да се определат D-H параметрите на роботската рака.

- б) Да се определи директната кинематика на дадената роботска рака.
- в) Да се определи Јакобијанот на набљудуваната роботска рака во однос на референтниот координатен систем.
- г) Да се определи Јакобијанот на линеарната брзина на набљудуваната роботска рака во однос на координатниот систем $\{1\}$.
- д) Да се определат сингуларитетите на роботската рака од задачата и да се даде нивното физикално значење.



Слика 3.8. Илустрација кон Задача 3.17

Решение: а) D-H параметрите на набљудуваната роботска рака се дадени во Таблица 3.5.

Таблица 3.5. D-H параметри на роботската рака од Слика 3.8

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	0
2	θ_2	0	1	-90^0
3	θ_3	0	1	90^0
4	0	0	1	-90^0

Забелешка: $d_i = 0$ бидејќи нема транслаторни зглобови и движења; $a_i = 1$ се растојанија помеѓу z -оските на соседните координатни системи и тие се еднакви со должините од краците.

б) Да се определи директната кинематика на дадената роботска рака значи да се определи трансформационата матрица 0T_4 . Со помош на параметрите определени под а) можат да се пресметаат D-H трансформационите матрици:

$${}^0T_1 = A_1 = \mathbf{R}(z, \theta_1)\mathbf{Trans}(0,0, d_1)\mathbf{Trans}(a_1,0,0)\mathbf{R}(x, \alpha_1) \Rightarrow$$

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

$$\mathbf{A}_2 = {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = {}^0\mathbf{T}_1 \times {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & -S_1 & C_1 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & C_1 & S_1 \\ -S_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = {}^0\mathbf{T}_2 \times {}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 - S_1S_3 & -C_1C_2S_3 - S_1C_3 & C_1S_2 & C_1C_2 + C_1 \\ S_1C_2C_3 + C_1S_3 & -S_1C_2S_3 + C_1C_3 & S_1S_2 & S_1C_2 + S_1 \\ -S_2C_3 & S_2S_3 & C_2 & -S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^0\mathbf{T}_4 = {}^0\mathbf{T}_3 \cdot {}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 - S_1S_3 & -C_1S_2 & -C_1C_2S_3 - S_1C_3 & C_1C_2C_3 - S_1S_3 + C_1C_2 + C_1 \\ S_1C_2C_3 + C_1S_3 & -S_1S_2 & -S_1C_2S_3 + C_1C_3 & S_1C_2C_3 + C_1S_3 + S_1C_2 + S_1 \\ -S_2C_3 & -C_2 & S_2S_3 & -S_2C_3 - S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

в) За бараниот Јакобијан се добива:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_4)_{14}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_4)_{14}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_4)_{14}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_4)_{24}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_4)_{24}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_4)_{24}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_4)_{34}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_4)_{34}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_4)_{34}}{\partial \theta_3} \\ \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_1 \end{pmatrix}_{13} & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_2 \end{pmatrix}_{13} & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_3 \end{pmatrix}_{13} \\ \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_1 \end{pmatrix}_{23} & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_2 \end{pmatrix}_{23} & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_3 \end{pmatrix}_{23} \\ \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_1 \end{pmatrix}_{33} & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_2 \end{pmatrix}_{33} & \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{T}_3 \end{pmatrix}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1C_2C_3 - C_1S_3 - S_1C_2 - S_1 & -C_1S_2C_3 - C_1S_2 & -C_1C_2S_3 - S_1C_3 \\ C_1C_2C_3 - S_1S_3 + C_1C_2 + C_1 & -S_1S_2C_3 - S_1S_2 & -S_1C_2S_3 + C_1C_3 \\ 0 & -C_2C_3 - C_2 & S_2S_3 \\ 0 & -S_1 & C_1S_2 \\ 0 & C_1 & S_1S_2 \\ 1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

каде што $({}^0\mathbf{T}_i)_{13}$, $({}^0\mathbf{T}_i)_{23}$, $({}^0\mathbf{T}_i)_{33}$ се елементите од третата колона на соодветните матрици ${}^0\mathbf{T}_i; i=1,2,3$, а елементите од првите три редици на матрицата \mathbf{J} се добиваат со диференцирање на првите три елементи од последната колона на матрицата ${}^0\mathbf{T}_4$, кои ја дефинираат позицијата на извршниот елемент од роботската рака.

г) Јакобијанот на линеарната брзина во однос на координатниот систем $\{1\}$ може да се определи на следниот начин:

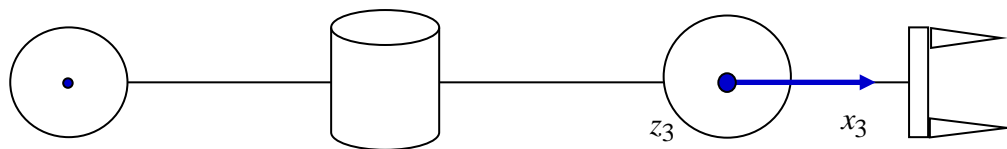
$${}^1\mathbf{J}_v = ({}^1\mathbf{R}_0) \cdot ({}^0\mathbf{J}_v) = ({}^0\mathbf{R}_1)^{-1} \cdot ({}^0\mathbf{J}_v) = ({}^0\mathbf{R}_1)^T \cdot ({}^0\mathbf{J}_v) \Rightarrow {}^1\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -S_1C_2C_3 - C_1S_3 - S_1C_2 - S_1 & -C_1S_2C_3 - C_1S_2 & -C_1C_2S_3 - S_1C_3 \\ C_1C_2C_3 - S_1S_3 + C_1C_2 + C_1 & -S_1S_2C_3 - S_1S_2 & -S_1C_2S_3 + C_1C_3 \\ 0 & -C_2C_3 - C_2 & S_2S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_3 & -S_2C_3 - S_2 & -C_2S_3 \\ C_2C_3 + C_2 + 1 & 0 & C_3 \\ 0 & -C_2C_3 - C_2 & S_2S_3 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

д) Сингуларитетите на набљудуваната роботска рака се определуваат од условот детерминантата на нејзиниот Јакобијан (во однос на кој и да било координатен систем) да е еднаква на нула. Така, детерминантата на Јакобијанот определен под г) ќе биде еднаква на нула кога:

$$\begin{aligned} \det({}^1\mathbf{J}) &= \begin{vmatrix} -S_3 & -S_2C_3 - S_2 & -C_2S_3 \\ C_2C_3 + C_2 + 1 & 0 & C_3 \\ 0 & -C_2C_3 - C_2 & S_2S_3 \end{vmatrix} = \\ &= S_3C_2(C_2 + C_2C_3)(1 + C_2 + C_2C_3) - \\ &- S_3C_3(C_2 + C_2C_3) + S_2S_3(S_2 + S_2C_3)(1 + C_2 + C_2C_3) = \\ &= S_3(1 + C_3) [C_2^2(1 + C_2 + C_2C_3) - C_2C_3 + S_2^2(1 + C_2 + C_2C_3)] = \\ &= S_3(1 + C_3) [(1 + C_2 + C_2C_3) - C_2C_3] = \\ &= S_3(1 + C_3)(1 + C_2) = 0 \Rightarrow S_3 = 0 \vee C_3 = -1 \vee C_2 = -1 \end{aligned} \quad (3.164)$$

Оттука, сингуларитетите на роботската рака од Слика 3.8 настапуваат за $\theta_3 = 0 \vee \pm 180^\circ$, односно $\theta_2 = \pm 180^\circ$.

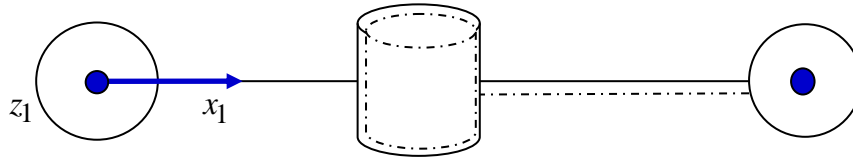
Сингуларитетот за $\theta_3 = 0$ означува дека раката е испружена како на Слика 3.9 и во таква положба од раката не е можно движење во правец на x_3 -оската.



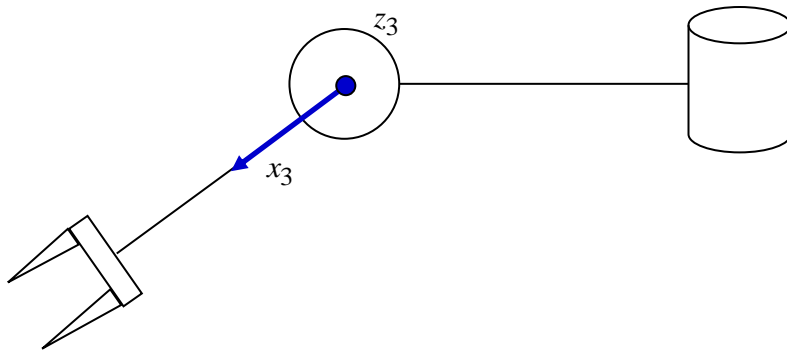
Слика 3.9. Приказ на сингуларитетот на роботската рака од Слика 3.8 за $\theta_3 = 0$

Сингуларитетот за $\theta_3 = \pm 180^\circ$ означува дека раката е преклопена како на Слика 3.10 и во таква положба од раката не е можно движење во правец на x_3 -оската. Исто така, бидејќи последните два крака од раката се со иста должина, извршниот елемент од раката се преклопува со вториот зглоб, па не е можно движење ни во правец на z_1 -оската.

Конечно, сингуларитетот за $\theta_2 = \pm 180^\circ$ означува дека раката е преклопена како на Слика 3.11, што значи дека зглобовите 1 и 3 се преклопуваат. Во таква положба од раката од аспект на завршниот елемент од раката, зглобот 3 како да не постои и не е можно движење во правец на x_3 -оската.

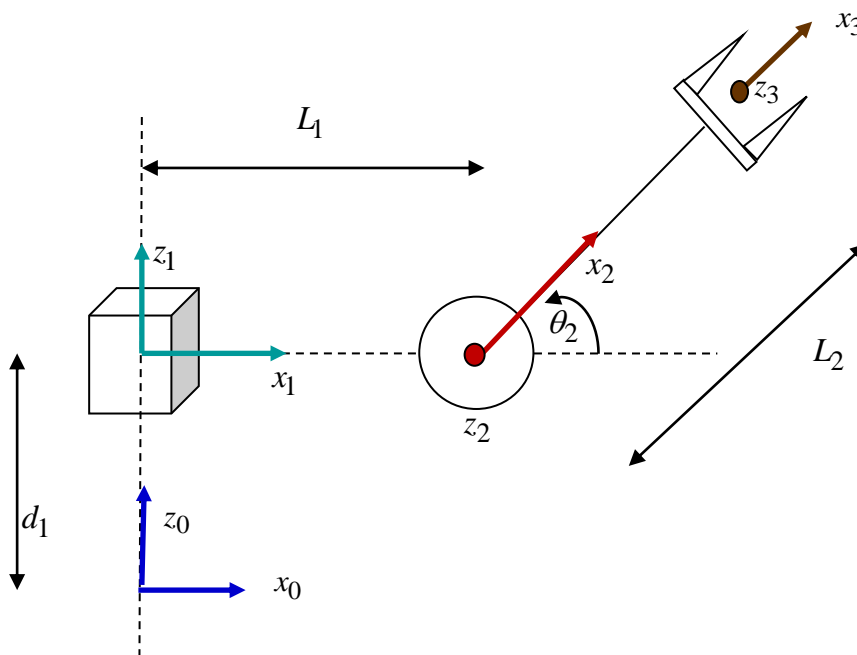


Слика 3.10. Приказ на сингуларитетот на роботската рака од Слика 3.8 за $\theta_3 = \pm 180^\circ$



Слика 3.11. Приказ на сингуларитетот на роботската рака од Слика 3.8 за $\theta_2 = \pm 180^\circ$

3.18. Дадена е PR роботската рака прикажана на Слика 3.12. а) Да се определи позицијата на координатниот почеток од координатниот систем $\{3\}$, придружен со извршниот елемент, во однос на координатниот систем $\{0\}$ придружен со основата од раката, односно да се определи трансформационата матрица 0T_3 .



Слика 3.12. Илустрација кон Задачата 3.18

б) Да се пресмета 3×2 -димензиониот Јакобијан кој ја дефинира врската помеѓу брзината на движење на зглобовите од роботската рака и линеарната брзина на координатниот почеток од координатниот систем $\{3\}$.

в) Да се определат сингуларитетите на роботската рака и да се објасни нивното физичко значење.

Решение: Зададениот робот има два зглоба – еден призматичен Р и еден ротационен R; следствено конфигурацијата на дадената роботска рака е PR. На Слика 3.12 се прикажани и координатните системи придружени со роботската рака: $\{0\} = \{x_0, y_0, z_0\}$ - координатен систем придружен со основата од роботската рака, $\{1\} = \{x_1, y_1, z_1\}$ - координатен систем придружен со првиот зглоб, $\{2\} = \{x_2, y_2, z_2\}$ - координатен систем придружен со вториот зглоб и $\{3\} = \{x_3, y_3, z_3\}$ - координатен систем придружен со крајот од роботската рака. Секогаш се прикажани само две оски од соодветниот координатен систем, затоа што третата е нормална на останатите две. Со L_1 и L_2 се означени должините на краците од роботската рака.

а) Врз основа на Слика 3.12 можат да се определат D-H параметрите на набљудуваната роботска рака. Меѓутоа, бараното решение наједноставно се добива геометриски, со што се избегнува определувањето на D-H параметрите. Така, за x -координатата, y -координатата и z -координатата на извршниот елемент од роботската рака на Слика 3.12 во однос на координатниот систем $\{0\}$ важи:

$$p_x = x_3 = L_1 + L_2 \cos \theta_2 = L_1 + L_2 C_2$$

$$p_y = 0$$

$$p_z = z_3 = d_1 + L_2 \sin \theta_2 = d_1 + L_2 S_2 \quad (3.165)$$

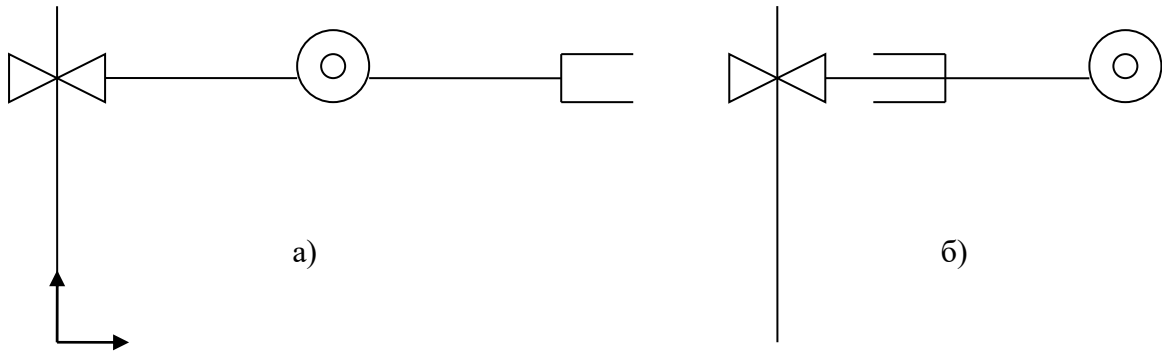
б) Бараниот Јакобијан се определува едноставно со диференцирање на равенките (3.165) во однос на променливите на зглобовите:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial d_1} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial p_y}{\partial d_1} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial p_z}{\partial d_1} & \frac{\partial p_z}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -L_2 S_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & L_2 C_2 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

в) Сингуларитетите се:

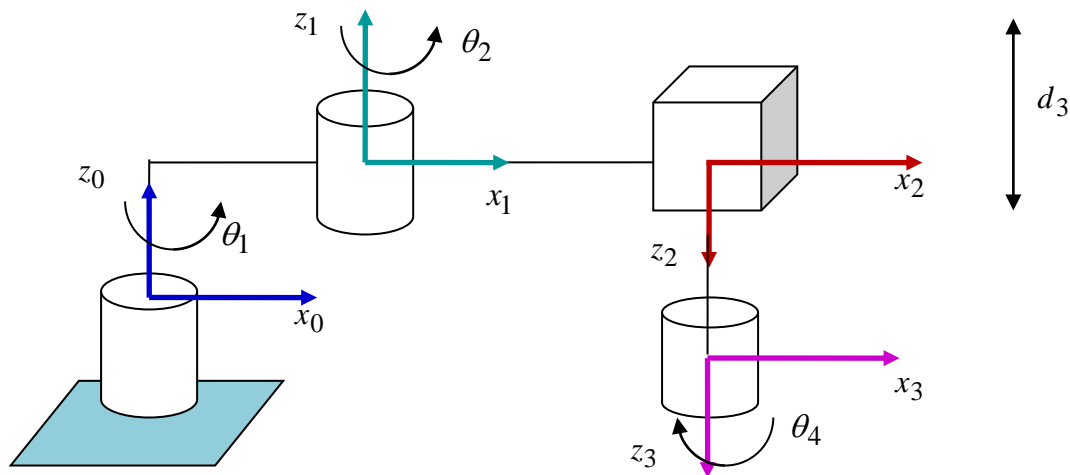
$$\theta_2 = \begin{cases} 0^0 \\ \pm 180^0 \end{cases} \quad (3.167)$$

Двата случаи се прикажани на Слика 3.13 – а) или раката е целосно испружена, или б) двата крака се преклопени, што значи дека извршниот елемент на раката не може да се движи во правец на x_0 - оската, бидејќи зглобовите не можат да произведат x -компонента на неговата брзина.



Слика 3.13.Претставување на сингуларитетите на роботската рака од Слика 3.12

3.19. Да се определат и да се интерпретираат сингуларитетите на SCARA роботската рака од Слика 3.14, која се состои од три RRP зглоба и извршен елемент со еден степен слобода на движење, кое претставува ротација околу вертикалната оска.



Слика 3.14.Илустрација кон Задача 3.19

Решение: D-Н параметрите за дадената SCARA роботска рака од Слика 3.14 се дадени во Таблицата 3.6. Притоа, променливите на зглобовите се: $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2, q_3 = d_3, q_4 = \theta_4$.

Таблица 3.6. D-H параметри на роботската рака од Слика 3.14

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	a_1	0^0
2	θ_2	0	a_2	180^0
3	0^0	d_3	0	0^0
4	θ_4	d_4	0	0^0

Врз основа на D-H параметрите, се пресметуваат матриците \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 и \mathbf{A}_4 :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{R}(z, \theta_1) \mathbf{Trans}(0, 0, d_1) \mathbf{Trans}(a_1, 0, 0) \mathbf{R}(x, \alpha_1) = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{R}(z, \theta_2) \mathbf{Trans}(0, 0, d_2) \mathbf{Trans}(a_2, 0, 0) \mathbf{R}(x, \alpha_2) = \\ &= \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & -C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.169)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3 &= \mathbf{R}(z, \theta_3) \mathbf{Trans}(0, 0, d_3) \mathbf{Trans}(a_3, 0, 0) \mathbf{R}(x, \alpha_3) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.170)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_4 &= \mathbf{R}(z, \theta_4) \mathbf{Trans}(0, 0, d_4) \mathbf{Trans}(a_4, 0, 0) \mathbf{R}(x, \alpha_4) = \\ &= \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.171)$$

Соодветната трансформациона матрица ${}^0\mathbf{T}_4$ е:

$${}^0\mathbf{T}_4 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_{12}C_4 + S_{12}S_4 & -C_{12}S_4 + S_{12}C_4 & 0 & a_1C_1 + a_2C_{12} \\ S_{12}C_4 - C_{12}S_4 & -S_{12}S_4 - C_{12}C_4 & 0 & a_1S_1 + a_2S_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

Јакобијанот на дадената роботска рака е:

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1S_1 - a_2S_{12} & -a_2S_{12} & 0 & 0 \\ a_1C_1 + a_2C_{12} & a_2C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

Делот од Јакобијанот ${}^0\mathbf{J}$ кој ги дефинира бараните сингуларитети е:

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -a_1S_1 - a_2S_{12} & -a_2S_{12} & 0 \\ a_1C_1 + a_2C_{12} & a_2C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

па:

$$\det \mathbf{J}_{11} = \begin{vmatrix} -a_1S_1 - a_2S_{12} & -a_2S_{12} & 0 \\ a_1C_1 + a_2C_{12} & a_2C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-a_1S_1 - a_2S_{12})(a_2C_{12})(-1) -$$

$$-(a_1C_1 + a_2C_{12})(-a_2S_{12})(-1) = a_1a_2(S_1C_{12} - C_1S_{12}) = -a_1a_2S_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\theta_2 = 0 \quad \text{или} \quad \theta_2 = 180^0 \quad (3.175)$$

Сингуларитетите настануваат кога раката е сосема свиткана или испружена.

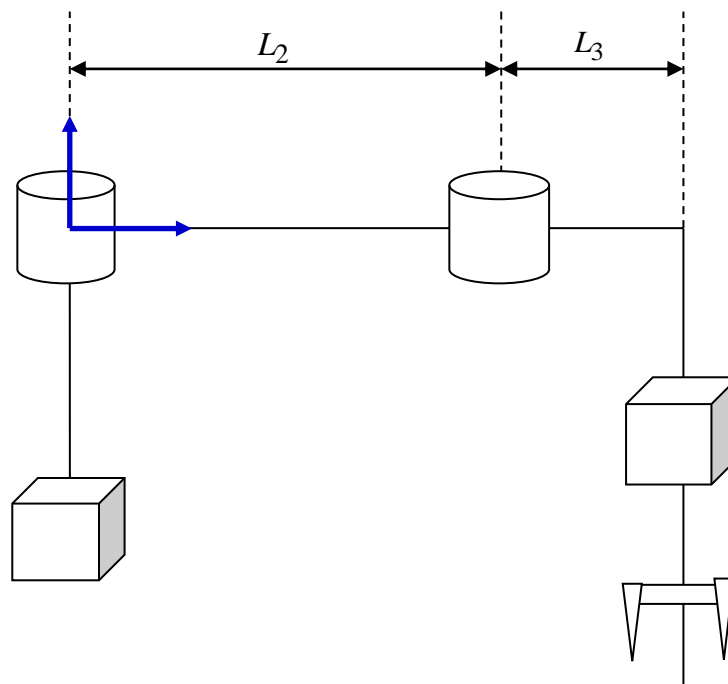
3.20. Дадена е PRRP роботската рака од долната слика.

а) Под претпоставка дека не постојат ограничувања врз движењето на зглобовите, да се скицира работниот простор на оваа роботска рака. Да се усвои $L_2 > L_3$.

б) Ако се набљудува само позицијата на извршниот елемент на раката (хваторот), колку решенија има задачата на инверзната кинематика во општ

случај? За да се одговори на ова прашање не треба да се решава задачата на инверзната кинематика.

в) Ако се отстрани првиот призматичен зглоб, така што првиот ротационен зглоб ќе ротира околу основата на роботската рака, и ако се набљудува само извршниот елемент на раката (хватот), колку решенија има инверзната кинематска задача во општ случај? И во овој случај, за да се одговори на прашањето, не треба да се решава задачата на инверзната кинематика.



Слика 3.15. Илустрација кон Задача 3.20

г) За PRRP роботската рака од Слика 3.15 се дадени следните хомогени трансформациони матрици:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

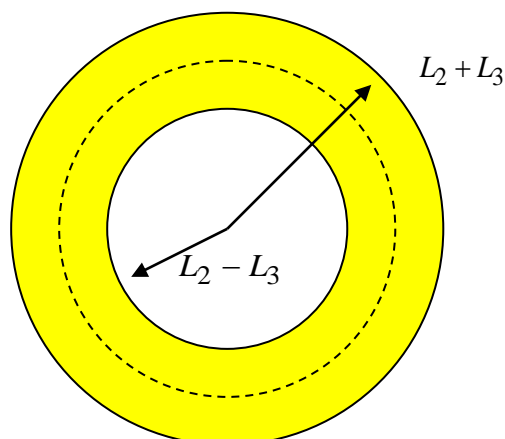
$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.179)$$

Да се реши задачата на директната кинематика на набљудуваната роботска рака.

д) Да се определи Јакобијанот на роботската рака во однос на референтниот координатен систем $\{0\}$, кој ја дефинира врската помеѓу брзината на извршниот елемент од роботската рака и брзините на зглобовите на роботот.

Решение: а) Работниот простор на дадената роботска рака од Слика 3.15 е прикажан на Слика 3.16. Бидејќи призматичните зглобови немаат никакви ограничувања, тој претставува бесконечен цилиндер во правец на z_0 - оската, со внатрешен радиус $L_2 - L_3$ и надворешен радиус $L_2 + L_3$.

б) Роботската рака од Слика 3.15 може да го позиционира извршниот елемент само надолу. Ако се определи конфигурација на зглобовите на роботската рака со која извршниот елемент од раката се поставува во дадена позиција, истата позиција може да се постигне со скусување на едниот призматичен зглоб за Δ и со издолжување на вториот призматичен зглоб за истата вредност Δ . Тоа значи дека во овој случај задачата на инверзната кинематика има бесконечно многу решенија.



Слика 3.16. Попречен пресек на работниот простор на роботската рака од Слика 3.15

в) Ако се отстрани првиот призматичен зглоб, така што првиот ротационен зглоб ќе ротира околу основата на роботската рака, за која било точка (x, y, z) поместувањето на призматичниот зглоб е целосно определено со z . Меѓутоа, постојат две вредности на променливите на ротационите зглобови за кои се добиват исти вредности за x и y – кога лактот на раката е горе и кога е доле. Следствено, во овој случај задачата на инверзната кинематика има две решенија.

г) Трансформационата матрица на набљудуваната роботска рака ${}^0\mathbf{T}_4$ е:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_4 &= ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) \cdot ({}^3\mathbf{T}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2c_3 - s_2s_3 & -c_2s_3 - s_2c_3 & 0 & c_2l_2 \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & s_2l_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2c_3 - s_2s_3 & -c_2s_3 - s_2c_3 & 0 & c_2l_2 + l_3(c_2c_3 - s_2s_3) \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & s_2l_2 + l_3(s_2c_3 + c_2s_3) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & c_2l_2 + l_3c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & s_2l_2 + l_3s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.180}
 \end{aligned}$$

д) Координатите на извршниот елемент на роботската рака од Слика 3.15 се $\mathbf{P} = [x \ y \ z]^T$ и тие се дадени со првите три елементи од последната колона на матрицата ${}^0\mathbf{T}_4$:

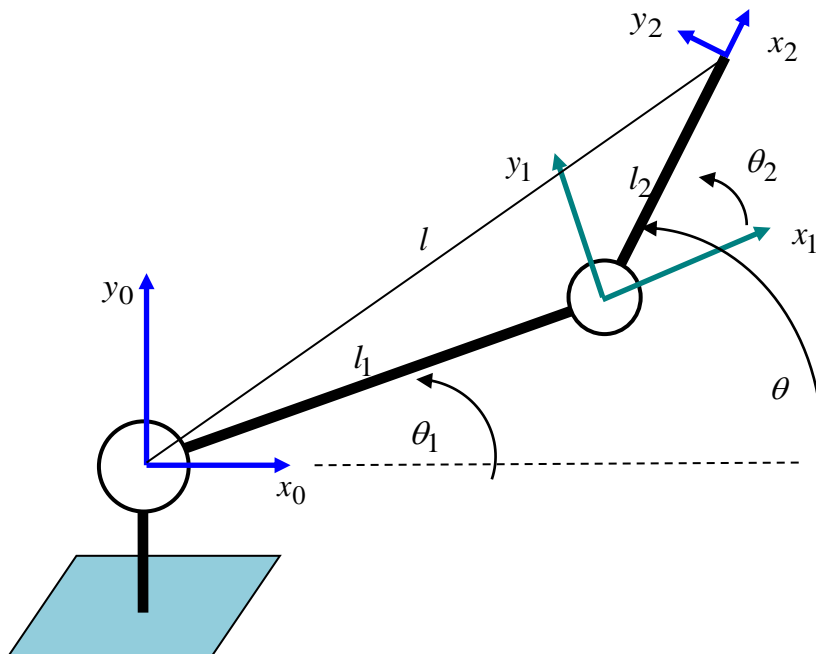
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} c_2 l_2 + l_3 c_{23} \\ s_2 l_2 + l_3 s_{23} \\ d_1 + d_4 \end{bmatrix} \quad (3.181)$$

Следствено, бараниот Јакобијан се добива со диференцирање на координатите на извршниот елемент во однос на променливите на роботската рака:

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial d_1} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial d_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -l_2 s_2 - l_3 s_{23} & -l_3 s_{23} & 0 \\ 0 & l_2 c_2 + l_3 c_{23} & l_3 c_{23} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.182)$$

3.21. Дадена е рамнинската роботска рака од Слика 3.17, која има два ротациони зглоба. а) Да се дефинира Јакобијанот на линеарните брзини на оваа рака и да се пресмета неговата инверзна матрица. б) Да се определат сингуларитетите на набљудуваната роботска рака. в) Во продолжение се набљудува алтернативна параметризација на работниот простор на роботот $\{l, \theta\}$, каде што l е растојанието од центарот на зглобот 1 до извршниот елемент, а θ е ориентацијата на извршниот елемент во однос на основата. Да

се пресмета Јакобијанот кој ја дефинира врската $\begin{bmatrix} \dot{l} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$ во овој случај, неговата инверзна матрица и сингуларитетите.



Слика 3.17. Илустрација кон Задача 3.21

Решение: а) Јакобијанот на линеарните брзини на зададената роботска рака од Слика 3.17 е:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix} \quad (3.183)$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J} &= \begin{vmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{vmatrix} = \\ &= -(l_1 S_1 + l_2 S_{12}) l_2 C_{12} + (l_1 C_1 + l_2 C_{12}) l_2 S_{12} = \\ &= l_1 l_2 (S_{12} C_1 - C_{12} S_1) = l_1 l_2 S_2 \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1} &= \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{l_1 l_2 S_2} \begin{bmatrix} l_2 C_{12} & l_2 S_{12} \\ -l_1 C_1 - l_2 C_{12} & -l_1 S_1 - l_2 S_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.185)$$

б) Сингуларитетите на набљудуваната роботска рака се добиваат за $\det \mathbf{J} = 0$ и тие се:

$$S_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = 0^0 \vee \theta_2 = 180^0 \quad (3.186)$$

Кога $\theta_2 = 0^0$, набљудуваната роботска рака е сосема испружена, а кога $\theta_2 = 180^0$ раката е свиткана. И во двата случаи не е можно движење во правец на x_1 – оската.

в) Со примена на законот на косинусите кој гласи:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (3.187)$$

каде што γ е аголот помеѓу страните a и b , на еден триаголник, а c е страната наспроти овој агол, од Слика 3.17 се добива:

$$\begin{aligned} l^2 &= l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\pi - \theta_2) \\ l &= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 C_2} \end{aligned} \quad (3.188)$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad (3.189)$$

Новиот Јакобијан на набљудуваната роботска рака се добива со диференцирање на равенките (3.188) и (3.189) по променливите на зглобовите:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l_1 l_2 S_2}{l} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

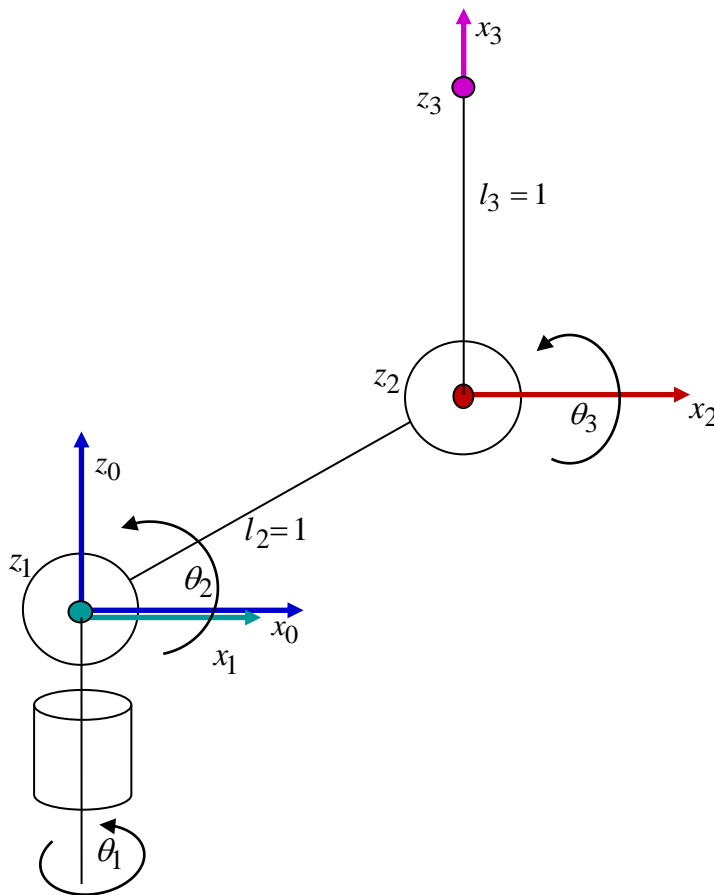
$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l_1 l_2 S_2}{l} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{l}{l_1 l_2 S_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l_1 l_2 S_2}{l} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.191)$$

$$\det \mathbf{J} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{l_1 l_2 S_2}{l} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{l_1 l_2 S_2}{l} \quad (3.192)$$

И во овј случај се добиваат истите сингуларитети, што е и логично, затоа што се работи за истиот робот:

$$S_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = 0^0 \vee \theta_2 = 180^0 \quad (3.193)$$

3.22. Дадена е RRR роботската рака од долната слика.



Слика 3.18. Илустрација кон Задача 3.22

а) Да се определи положбата на нејзиниот извршен елемент. б) Да се определи Јакобијанот на линеарните брзини ${}^0\mathbf{J}$ на набљудуваната роботска рака. в) Да се определи Јакобијанот ${}^2\mathbf{J}$. г) Да се определат сингуларитетите на набљудуваната роботска рака и да се даде нивното физичко значење.

Решение: а) D-H параметрите на набљудуваната роботска рака се дадени во долната таблица.

Таблица 3.7. D-H параметри на роботската рака од Слика 3.18

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	90^0
2	θ_2	0	1	0^0
3	θ_3	0	1	0^0

Со помош на овие D-H параметри се пресметуваат матриците \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 и \mathbf{A}_3 :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.194)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.195)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.196)$$

додека соодветните трансформациони матрици ${}^0\mathbf{T}_i$ се:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.197)$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & C_1 C_2 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & S_1 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.198)$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & C_1(C_2 + C_{23}) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(C_2 + C_{23}) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & S_2 + S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.199)$$

Положбата на извршниот елемент од дадената роботска рака во просторот е одредена со трансформационата матрица ${}^0\mathbf{T}_3$.

б) Јакобијанот на линеарните брзини на набљудуваната роботска рака е:

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -S_1(C_2 + C_{23}) & -C_1(S_2 + S_{23}) & -C_1 S_{23} \\ C_1(C_2 + C_{23}) & -S_1(S_2 + S_{23}) & -S_1 S_{23} \\ 0 & C_2 + C_{23} & C_{23} \end{bmatrix} \quad (3.200)$$

в) Јакобијанот ${}^2\mathbf{J}$ се пресметува на следниот начин:

$${}^2\mathbf{J} = {}^2\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\mathbf{J} = ({}^0\mathbf{R}_2)^{-1} \cdot {}^0\mathbf{J} \quad (3.201)$$

каде што ${}^0\mathbf{R}_2$ е ротациониот дел од матрицата ${}^0\mathbf{T}_2$:

$${}^0\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 \\ S_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.202)$$

Оттука:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 \\ S_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -S_1(C_2 + C_{23}) & -C_1(S_2 + S_{23}) & -C_1 S_{23} \\ C_1(C_2 + C_{23}) & -S_1(S_2 + S_{23}) & -S_1 S_{23} \\ 0 & C_2 + C_{23} & C_{23} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -S_3 & -S_3 \\ 0 & 1 + C_3 & C_3 \\ -(C_2 + C_{23}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.203)$$

г) Сингуларитетите на роботската рака од задачата се определуваат од условот:

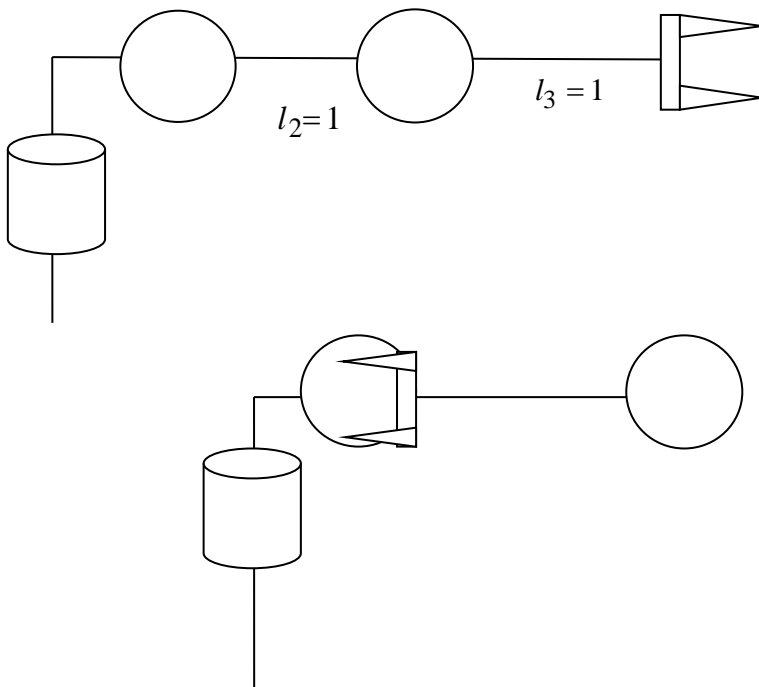
$$\det({}^2\mathbf{J}) = \begin{vmatrix} 0 & -S_3 & -S_3 \\ 0 & 1 + C_3 & C_3 \\ -C_2 - C_{23} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -S_3(C_2 + C_{23}) = 0 \quad (3.204)$$

и тие настапуваат за:

$$S_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = 0 \vee \theta_3 = 180^0 \quad (3.205)$$

$$C_2 + C_{23} = 0 \quad (3.206)$$

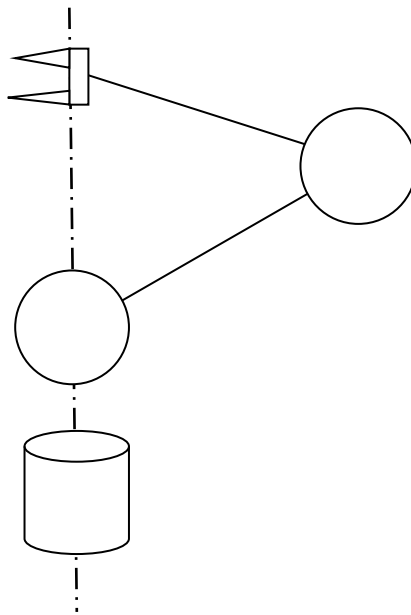
Кога $\theta_3 = 0^0$, раката е целосно испружена во x - z рамнината, а кога $\theta_3 = 180^0$ таа е целосно преклопена. И во двата случаи не е можно движење долж x_2 – оската, како што се гледа од долната слика.



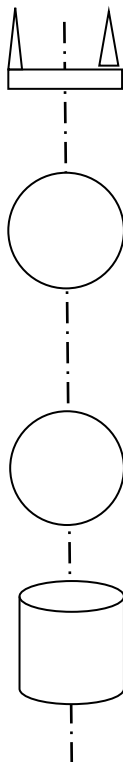
Слика 3.19. Графички приказ на сингуларитетот $S_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = 0 \vee \theta_3 = 180^0$ на роботската рака од Задача 3.22

Кога $C_2 + C_{23} = 0$, вкупното поместување на извршниот елемент од раката во $x_0 - y_0$ рамнината е нулево, бидејќи извршниот елемент е поставен директно над координатниот почеток од координатниот систем $\{0\}$. Следствено, извршниот елемент не може да се движи долж z_2 – оската, како што се гледа од Слика 3.20.

Кога $\theta_2 = 90^0$ и $\theta_3 = 0^0$, и двата сингуларитети се едновремено присутни. Соодветната конфигурација е прикажана на Слика 3.21. Роботската рака не може да се движи ни во правец на x_2 – оската ни во правец на z_2 – оската.

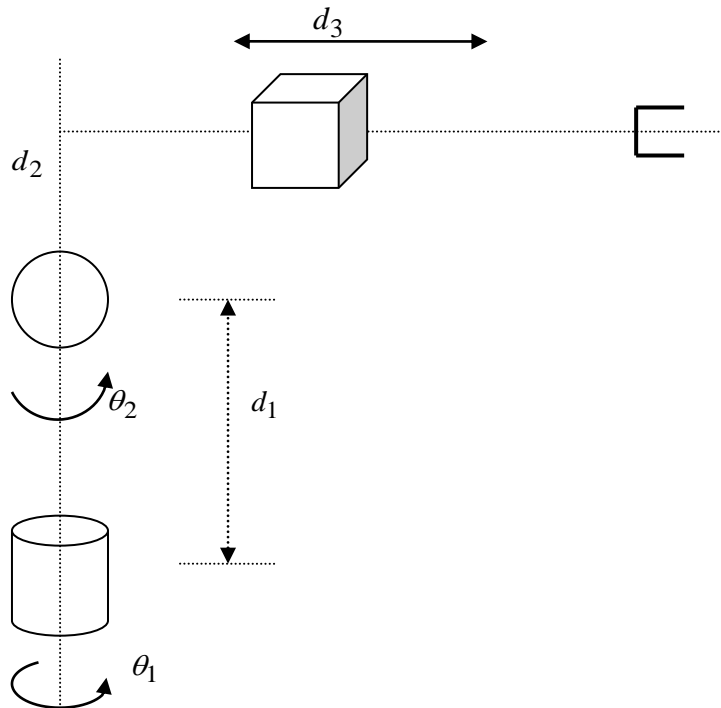


Слика 3.20. Графички приказ на сингуларитетот $C_2 + C_{23} = 0$ на роботската рака од Задача 3.22



Слика 3.21. Графички приказ на сингуларитетот $\theta_2 = 90^0$ и $\theta_3 = 0^0$ на роботската рака од Задача 3.22

3.23. Дадена е 2RP роботската рака од Слика 3.22.



Слика 3.22. Илустрација кон Задача 3.23

а) Да се определи трансформационата матрица 0T_3 .

б) За дадена почетна положба $\theta_1 = \theta_2 = 0^0$ и $d_3 = 5$, да се одреди новата положба на раката како резултат на диференцијалните движења $[d\theta_1 \ d\theta_2 \ dl_3]^T = [0.1 \ -0.1 \ 0.05]^T$.

в) Да се определи диференцијалниот оператор ${}^3\Delta$.

Решение: Дадената роботска рака од Слика 3.22 може да се претстави шематски како на Слика 3.23. Правецот и насоката на z_0 – оската се определува според правилото на десната рака, z_1 – оската е нормална на рамнината од листот и излегува од него, додека z_2 – оската е во правец на транслаторниот зглоб.

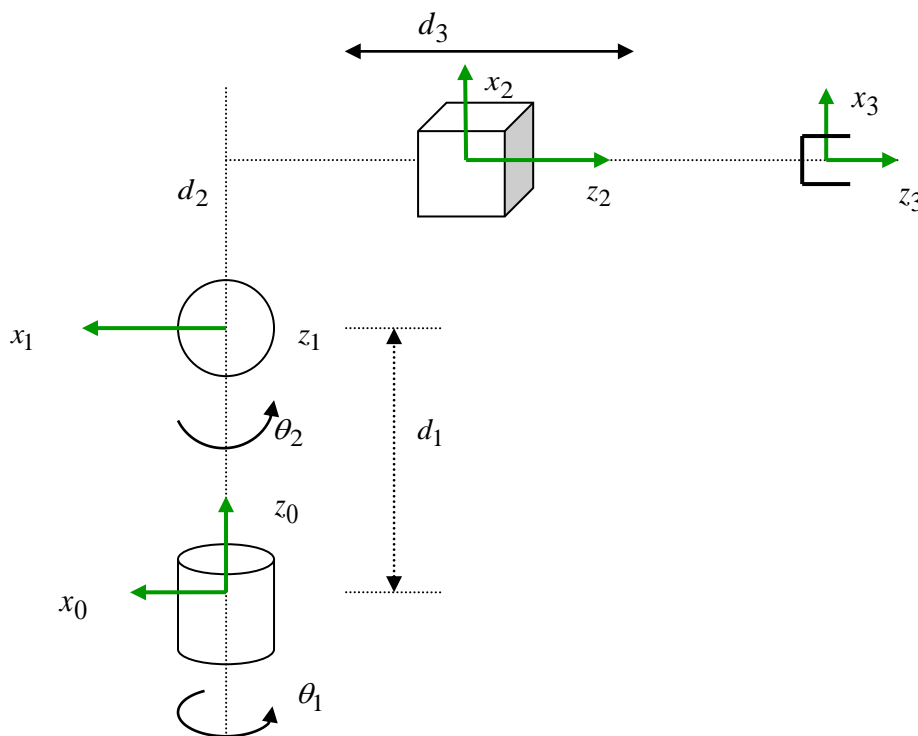
а) D-H параметрите за дадената роботска рака се дадени во Таблицата 3.8.

Заради поголема едноставност во пресметките, а без каков и да било проблем, со соодветно поставување на координатните системи $\{1\}$ и $\{2\}$ може да се направи $d_1 = 0$, $d_2 = 0$. (Без оглед на поставеноста на внатрешните координатни системи, резултатот ќе биде ист сè додека се совпаѓа

поставеноста на крајните координатни системи, што е и логично, бидејќи се работи за иста положба на роботската рака, опишана со матрицата ${}^0\mathbf{T}_3$).

Таблица 3.8. D-H параметри на роботската рака од Задачата 3.23

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	d_1	0	90^0
2	θ_2^*	d_2	0	90^0
3	0	d_3^*	0	0



Слика 3.23. D-H модел на роботската рака од Слика 3,22

б) Со помош на D-H параметрите од горната таблица се пресметуваат матриците:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.207)$$

а) Трансформационата матрица ${}^0\mathbf{T}_3$ се добива како производ од матриците \mathbf{A} :

$${}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1C_2 & S_1 & C_1S_2 & C_1S_2d_3 \\ S_1C_2 & -C_1 & S_1S_2 & S_1S_2d_3 \\ S_2 & 0 & -C_2 & C_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.208)$$

б) Јакобијанот на набљудуваната роботска рака е:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} S_1S_2d_3 & C_1C_2d_3 & C_1C_2 \\ C_1S_2d_3 & S_1C_2d_3 & S_1S_2 \\ 0 & -S_2d_3 & C_2 \\ 0 & S_1 & C_1S_2 \\ 0 & -C_1 & S_1S_2 \\ 1 & 0 & -C_2 \end{bmatrix} \quad (3.209)$$

и за дадените почетни вредности изнесува:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.210)$$

Оттука, диференцијалните движења на раката кои се резултат на зададените диференцијални придвижувања на зглобовите $[d\theta_1 \ d\theta_2 \ dl_3]^T = [0.1 \ -0.1 \ 0.05]^T$ се:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0 \\ 0.05 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad (3.211)$$

Врз основа на пресметаните диференцијални движења (3.211) за диференцијалниот оператор на набљудуваната роботска рака се добива:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -0.05 & 0.1 & -0.15 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.212)$$

па промената на положбата на раката $d\mathbf{T}$, како резултат на настанатите диференцијални движења е:

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T}_{stara} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.05 & 0.1 & -0.15 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & -0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.213) \end{aligned}$$

а нејзината нова положба ќе изнесува:

$$\mathbf{T}_{nova} = \mathbf{T}_{stara} + d\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 & -0.1 & 0.05 \\ 0.050 & -1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & -1 & 5.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.214)$$

Диференцијалниот оператор (3.212) е пресметан во однос на референтниот координатен систем. Во однос на координатниот систем $\{3\}$ тој ќе биде:

$${}^3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & -0.1 & 0.05 \\ -0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.215)$$

3.24. Дадени се D-H параметрите на роботска рака со 6 ротациони зглоба. Да се пресметаат елементите ${}^T_6 J_{16}$ и ${}^T_6 J_{21}$ на нејзиниот Јакобијан ${}^T_6 \mathbf{J}$.

Таблица 3.9. D-H параметри на роботската рака од Задача 2.23

	θ	d	a	α
1	θ_1	0	0	90^0
2	θ_2	0	a_2	0^0
3	θ_3	0	a_3	0^0
4	θ_4	0	a_4	-90^0
5	θ_5	0	0	90^0
6	θ_6	0	0	0^0

Решение: Со помош на дадените D-H параметри се пресметуваат матриците \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 , \mathbf{A}_4 , \mathbf{A}_5 и \mathbf{A}_6 :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.216)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.217)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C\alpha_3 & S\theta_3 S\alpha_3 & a_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C\alpha_3 & -C\theta_3 S\alpha_3 & a_3 S\theta_3 \\ 0 & S\alpha_3 & C\alpha_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.218)$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 C\alpha_4 & S\theta_4 S\alpha_4 & a_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 C\alpha_4 & -C\theta_4 S\alpha_4 & a_4 S\theta_4 \\ 0 & S\alpha_4 & C\alpha_4 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & a_4 C_4 \\ S_4 & 0 & C_4 & a_4 S_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.219)$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 C\alpha_5 & S\theta_5 S\alpha_5 & a_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 C\alpha_5 & -C\theta_5 S\alpha_5 & a_5 S\theta_5 \\ 0 & S\alpha_5 & C\alpha_5 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.220)$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C\theta_6 & -S\theta_6 C\alpha_6 & S\theta_6 S\alpha_6 & a_6 C\theta_6 \\ S\theta_6 & C\theta_6 C\alpha_6 & -C\theta_6 S\alpha_6 & a_6 S\theta_6 \\ 0 & S\alpha_6 & C\alpha_6 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.221)$$

и, потоа, трансформационата матрица ${}^0\mathbf{T}_6$:

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.222)$$

$$n_x = C_1(C_{234}C_5C_6 - S_{234}S_6) - S_1S_5S_6$$

$$n_y = S_1(C_{234}C_5C_6 - S_{234}S_6) + C_1S_5S_6$$

$$n_z = S_{234}C_5C_6 + C_{234}S_6$$

$$o_x = C_1(-C_{234}C_5C_6 - S_{234}C_6) + S_1S_5S_6$$

$$o_y = S_1(-C_{234}C_5C_6 - S_{234}C_6) - C_1S_5S_6$$

$$o_z = -S_{234}C_5C_6 + C_{234}C_6$$

$$a_x = C_1C_{234}S_5 + S_1C_5$$

$$a_y = S_1C_{234}S_5 - C_1C_5$$

$$a_z = S_{234}S_5$$

$$p_x = C_1(C_{234}a_4 + C_{23}a_3 + C_2a_2)$$

$$p_y = S_1(C_{234}a_4 + C_{23}a_3 + C_2a_2)$$

$$p_z = S_{234}a_4 + S_{23}a_3 + S_2a_2 \quad (3.223)$$

Елементот ${}^T_6 J_{16}$ на Јакобијанот ${}^T_6 \mathbf{J}$ се пресметува по формулата:

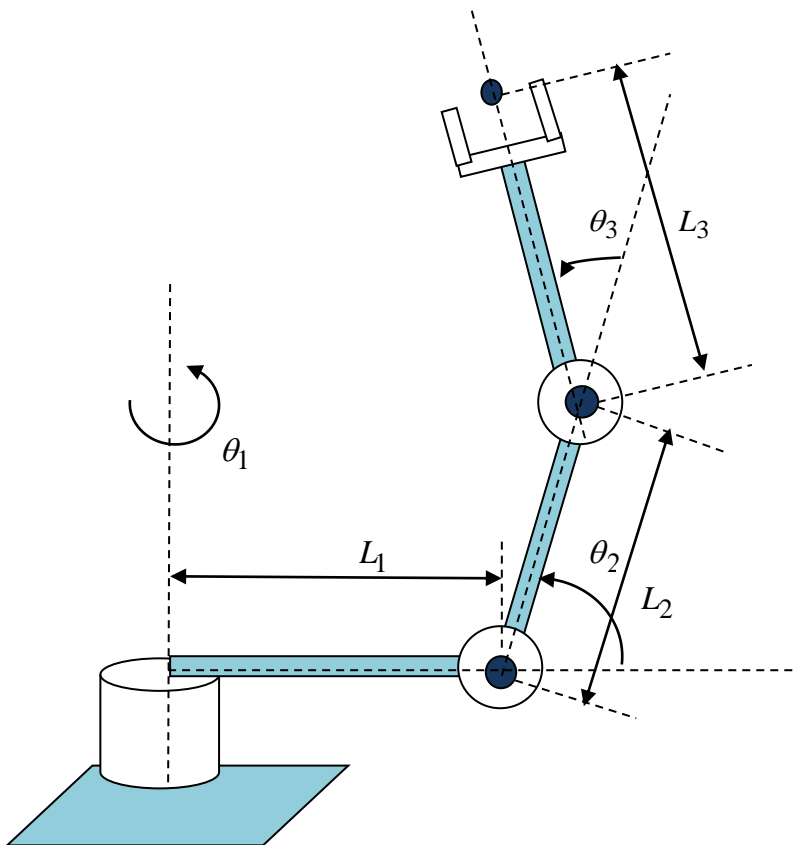
$${}^T_6 J_{1i} = -n_x p_y - n_y p_x = 0 \quad (3.224)$$

при што o_x , o_y , p_x и p_y се соодветните елементи на матрицата ${}^5\mathbf{T}_6$, додека елементот ${}^T_6 J_{21}$ се пресметува по формулата:

$${}^T_6 J_{2i} = -o_x p_y + o_y p_x = -S_5 S_6 (C_{234} a_4 + C_{23} a_3 + C_2 a_2) \quad (3.225)$$

при што o_x , o_y , p_x и p_y се соодветните елементи на матрицата ${}^0\mathbf{T}_6$.

3.25. Дадена е роботската рака од Слика 3.24. Да се определат нејзините сингуларитети, под претпоставка дека $L_2 + L_3 > L_1$.



Слика 3.24. Илустрација кон Задача 3.25

Решение: За директната кинематика на дадената роботска рака се добива:

$$x = (L_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23}) C_1$$

$$y = (L_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23}) S_1$$

$$z = L_2 S_2 + L_3 S_{23}$$

(Решението може да се добие или геометриски или со примена на D-H конвенцијата).

Јакобијанот на линеарната брзина на роботската рака е:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(L_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23}) S_1 & -(L_2 S_2 + L_3 S_{23}) C_1 & (-L_3 S_{23}) C_1 \\ (L_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23}) C_1 & -(L_2 S_2 + L_3 S_{23}) S_1 & (-L_3 S_{23}) S_1 \\ 0 & L_2 C_2 + L_3 C_{23} & L_3 C_{23} \end{bmatrix} \quad (3.226)$$

Сингуларитетите на набљудуваната роботска рака се добиваат од условот:

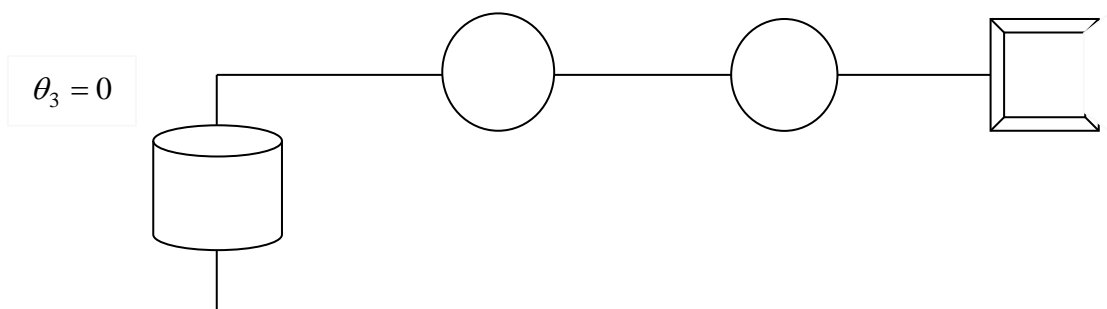
$$\det \mathbf{J}_v = \begin{vmatrix} -(L_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23}) S_1 & -(L_2 S_2 + L_3 S_{23}) C_1 & (-L_3 S_{23}) C_1 \\ (L_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23}) C_1 & -(L_2 S_2 + L_3 S_{23}) S_1 & (-L_3 S_{23}) S_1 \\ 0 & L_2 C_2 + L_3 C_{23} & L_3 C_{23} \end{vmatrix} =$$

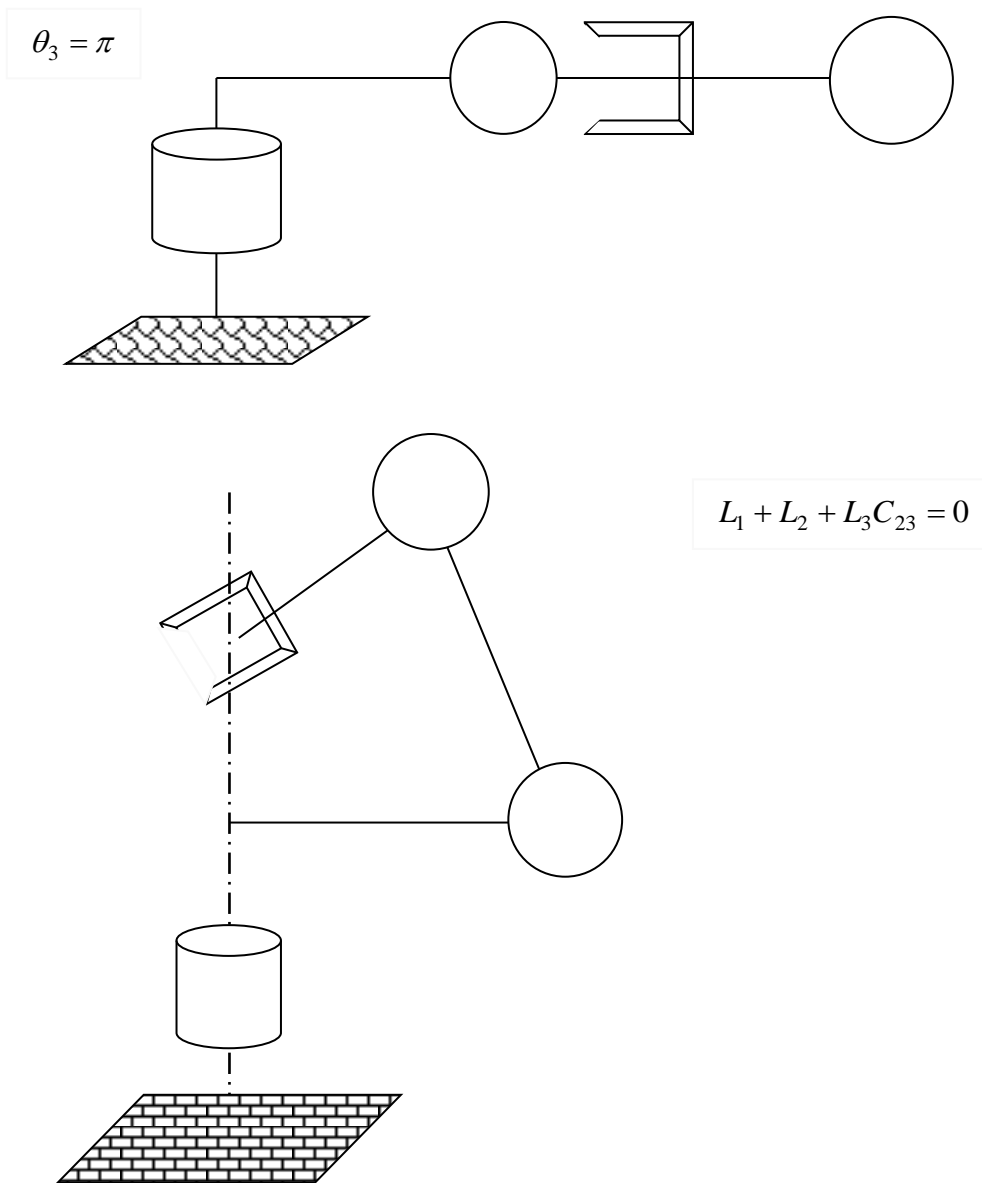
$$= -L_2 L_3 (L_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23}) S_3 = 0 \quad (3.227)$$

и тие се дефинирани со следните вредности на променливите на зглобовите од раката:

$$\sin(\theta_3) = 0 \Rightarrow \theta_3 = 0, \theta_3 = \pi$$

$$L_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23} = 0 \Rightarrow \quad (3.228)$$





Слика 3.25. Сингуларитети на роботската рака од Слика 3.25

4. ДИНАМИКА НА РОБОТСКА РАКА

Во принцип, за одредување на движењето на една роботска рака може да се користи Њутоновата механика. Меѓутоа, со оглед на фактот дека роботските раце се тридимензионални механизми со повеќе степени слобода на движење и со распределени маси, примената на Њутоновата механика се покажува извонредно тешка. Затоа, наместо Њутоновата, во пракса се користат други постапки и техники како, на пример, **Лагранжовата механика**. Лагранжовата механика е заснована само врз појавите и поимите врзани за енергијата и, оттаму, во многу случаи нејзината примена е многу полесна.

Лагранжовата механика е заснована врз следните две генерализирани равенки – едната за линеарни движења:

$$F_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (4.1)$$

и другата за ротациони движења:

$$T_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \quad (4.2)$$

во кои F_i се надворешните сили кај линеарните движења, T_i се вртливите моменти кај ротационите движења, x го претставува самото линеарно движење (патот, поместувањето), θ го претставува аголот завртување (аголот на ротација) и L е тн. **Лагранжијан**, кој е дефиниран како разлика помеѓу кинетичката K и потенцијалната енергија P на набљудуваниот систем:

$$L = K - P \quad (4.3)$$

Следствено, за да се состави динамичкиот модел на една роботска рака со n степени слобода на движење со помош на Лагранжовата механика, најнапред треба да се определи незината вкупна кинетичка и потенцијална енергија и потоа, со диференцирање на нејзиниот Лагранжијан во согласност со (4.1) и (4.2), да се добијат бараните n диференцијални равенки на движење – по една за секој степен слобода на движење. Заради поголема едноставност на записот и натамошните пресметки, овој модел најчесто се запишува во матричен облик, кој за роботска рака со 2 степени слобода на движење гласи:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Матрицата $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ во (4.4) се нарекува **инерциска матрица**. Таа содржи маси и инерциски моменти. Елементот D_{11} на оваа матрица се нарекува **ефективен момент на инерција** за јазолот 1 и се однесува на вртливиот момент $D_{11}\ddot{q}_1$ предизвикан од неговото забрзување \ddot{q}_1 . Елементот D_{22} се нарекува ефективен момент на инерција за јазолот 2 и се однесува на вртливиот момент $D_{22}\ddot{q}_2$ предизвикан од неговото забрзување \ddot{q}_2 . Елементот D_{12} се нарекува **здружена инерција** помеѓу јазлите 1 и 2 и го претставува вртливиот момент $D_{12}\ddot{q}_1$ кој дејствува врз јазолот 2, а е предизвикан од забрзувањето \ddot{q}_1 на јазолот 1. На сличен начин се дефинира и коефициентот D_{21} како здружена инерција помеѓу јазлите 2 и 1, таква што забрзувањето \ddot{q}_2 на јазолот 2 предизвикува вртлив момент кој дејствува врз јазолот 1 еднаков на $D_{21}\ddot{q}_2$. Инерциската матрица е основна матрица на роботската динамика, исто како што Јакобијанот е основната матрица на роботската кинематика. Таа е симетрична, позитивно дефинитна (определена), несингуларна и нејзината детерминанта е поголема од нула. Од тие причини секогаш може да се определи инверзна матрица кон инерциската матрица.

Матрицата $\mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ во (4.4) е **матрица на центрифугални сили**. Нејзините елементи ги претставуваат центрифугалните сили кои дејствуваат врз некој зглоб како резултат на брзината на друг зглоб. Така, нејзините членови ги претставуваат центрифугалните сили во зглобот i како резултат од брзината на зглобот j .

Матрицата $\mathbf{C}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ е **матрица на Кориолисовите сили**. Таа ги претставува силите во одделните зглобови заради заедничкото движење на два зглоба. Така, членови со $\dot{q}_1\dot{q}_2$ ги претставуваат тн. **Кориолисови забрзувања**, кои помножени со соодветните маси ги даваат тн. **Кориолисови сили**.

Векторот $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ се нарекува **гравитациски вектор**. Елементите D_1 и D_2 на овој вектор ги претставуваат гравитациските сили во зглобовите 1 и 2, соодветно. Гравитацискиот вектор не се јавува во бестежинска состојба.

Вкупната кинетичка енергија на една роботска рака со n степени слобода на движење може да се претстави како збир од кинетичките енергии на нејзините краци, и таа е дадена со изразот:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{s=1}^i \text{trace}(\mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{is}^T) \dot{q}_p \dot{q}_s \quad (4.5)$$

каде што: q_i е генерализирана променлива на i -тиот зглоб ($q_i = d_i$ за транслаторен зглоб и $q_i = \theta_i$ за ротационен зглоб), \dot{q}_p е брзина на p -тиот зглоб, \dot{q}_s е брзина на s -тиот зглоб, \mathbf{J}_i е псевдоинерциската матрица на i -тиот зглоб, која е дадена со изразот:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

\mathbf{U}_{ip} е изводот на трансформационската матрица ${}^0\mathbf{T}_i$ на i -тиот зглоб во однос на променливата q_p и \mathbf{U}_{is} е изводот на трансформационската матрица ${}^0\mathbf{T}_i$ на i -тиот зглоб во однос на променливата q_s . Изводите \mathbf{U}_{ij} се пресметуваат по формулата:

$$\mathbf{U}_{ij} = \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_j \cdots \mathbf{A}_i)}{\partial q_j} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j \cdots \mathbf{A}_i, \quad j \leq i \quad (4.7)$$

каде што, во зависност од тоа дали се работи за трансляторен или ротационен зглоб, константната матрица \mathbf{Q}_j има една од следните две вредности:

$$\mathbf{Q}_{j_{trans}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{Q}_{j_{rot}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Бидејќи матрицата ${}^0\mathbf{T}_i$ секогаш се диференцира само во однос на една променлива q_j , постои само една матрица \mathbf{Q}_j .

Изводите на матрицата ${}^0\mathbf{T}_i$ од повисок ред можат да се дефинираат на сличен начин:

$$\mathbf{U}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} \quad (4.10)$$

Кон равенката (4.5) може да се додаде и равенката за кинетичката енергија на актуаторите на роботската рака. Под претпоставка дека еден актуатор има

инерција $J_{i(actuator)}$, неговата кинетичка енергија ќе биде $\frac{1}{2} J_{i(actuator)} \dot{q}_i^2$, па вкупната кинетичка енергија на роботската рака со актуатори ќе гласи:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{s=1}^i \text{trace}(\mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{is}^T) \dot{q}_p \dot{q}_s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_{i(actuator)} \dot{q}_i^2 \quad (4.11)$$

Потенцијалната енергија на роботската рака е збир од потенцијалните енергии на секој крак одделно и може да се претстави во облик:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \left[-m_i \mathbf{g}^{tr} \left({}^0\mathbf{T}_i \mathbf{r}_i \right) \right] \quad (4.12)$$

каде што $\mathbf{g}^{tr} = [g_x \quad g_y \quad g_z \quad 0]$ е гравитациска матрица - редица, додека векторот \mathbf{r}_i ја одредува положбата на тежиштето на кракот i во однос на координатниот систем придружен кон кракот. Потенцијалната енергија е скаларна величина, додека матрицата - редица $\mathbf{g}^{tr} = [g_x \quad g_y \quad g_z \quad 0]$ е со димензија (1×4) , а векторот на положба $({}^0\mathbf{T}_i \mathbf{r}_i)$ е со димензија (4×1) . Вредностите на елементите од гравитациската матрица зависат од ориентацијата на референтниот координатен систем.

Врз основа на изразите (4.11) и (4.12), за Лагранжијанот на набљудуваната роботска рака се добива:

$$L = K - P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{s=1}^i \text{trace}(\mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{is}^T) \dot{q}_p \dot{q}_s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_{i(actuator)} \dot{q}_i^2 - \sum_{i=1}^n \left[-m_i \mathbf{g}^{tr} \left({}^0\mathbf{T}_i \mathbf{r}_i \right) \right] \quad (4.13)$$

Динамичките равенки на движење на роботската рака, како што веќе е напоменато, се добиваат со диференцирање на Лагранжијанот (4.13) и тие го имаат следниот облик:

$$T_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + J_{i(actuator)} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \quad (4.14)$$

каде што:

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^n \text{trace}(\mathbf{U}_{pj} \mathbf{J}_p \mathbf{U}_{pi}^T) \quad (4.15)$$

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^n \text{trace}(\mathbf{U}_{pjk} \mathbf{J}_p \mathbf{U}_{pi}^T) \quad (4.16)$$

$$D_i = \sum_{p=i}^n -m_p \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{pi} \mathbf{r}_p \quad (4.17)$$

Првиот член во равенките (4.14) се однесува на аголните забрзувања и инерцијата на одделните зглобови, вториот член ја претставува инерцијата на актуаторот на i -тиот зглоб, третиот член ги претставува центрифугалните и Кориолисовите сили и последниот член е гравитациски.

Секогаш кога роботската рака треба да врши одредена работа, нејзиниот управувачки процесор мора да ги придвижи зглобовите на раката со одредена брзина за да ги создаде потребните сили и моменти на крајот од раката. За да се воспостави врска помеѓу силите и вртливите моменти во зглобовите и силите и моментите создадени на крајот од роботската рака се дефинира векторот:

$${}^H \mathbf{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T \quad (4.18)$$

каде што F_x, F_y, F_z се силите долж x, y, z - оските, а M_x, M_y, M_z се моментите околу x, y, z - оските на координатниот систем \mathbf{H} придружен со крајниот зглоб од роботската рака. На сличен начин се дефинира и векторот на силите и моментите во зглобовите од роботската рака:

$${}^H \mathbf{T} = [T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_5 \quad T_6]^T \quad (4.19)$$

каде што $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ ги претставуваат вртливите моменти во ротациските, односно силите во призматичните зглобови од роботската рака.

Ако со:

$${}^H \mathbf{D} = [dx \quad dy \quad dz \quad \delta x \quad \delta y \quad \delta z]^T \quad (4.20)$$

и:

$${}^H \mathbf{D}_\theta = [d\theta_1 \quad d\theta_2 \quad d\theta_3 \quad d\theta_4 \quad d\theta_5 \quad d\theta_6]^T \quad (4.21)$$

се означат трансляциите и ротациите во однос на x, y, z - оските на координатниот систем \mathbf{H} придружен со крајниот зглоб од роботската рака и диференцијалните движења во зглобовите, соодветно, може да се запише:

$$\delta W = [{}^H \mathbf{F}]^T \cdot [{}^H \mathbf{D}] = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{D}_\theta] \quad (4.22)$$

Равенката (4.22) произлегува од законот за вкупната виртуелна работа во зглобовите, која мора да биде еднаква на вкупната работа на крајот од роботската рака, и кажува дека производот од силите односно моментите и соодветните придвижувања на роботската рака е еднаков со производот од силите или вртливите моменти и придвижувањата на зглобовите од роботската рака. Преку Јакобијанот на роботската рака, таа може да се запише во облик:

$$[{}^H \mathbf{F}]^T \cdot [{}^H \mathbf{D}] = [{}^H \mathbf{F}]^T \cdot [{}^H \mathbf{J}] \cdot [\mathbf{D}_\theta] = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{D}_\theta] \quad (4.23)$$

па, оттука, непосредно следува:

$$[{}^H \mathbf{F}]^T \cdot [{}^H \mathbf{J}] = [\mathbf{T}]^T \quad (4.24)$$

или, што е еквивалентно:

$$[\mathbf{T}] = [{}^H \mathbf{J}]^T \cdot [{}^H \mathbf{F}] \quad (4.25)$$

Равенката (4.25) овозможува силите и вртливите моменти во зглобовите од една роботска рака да се определат преку силите и моментите што дејствуваат на крајот од раката.

Ако со:

$$[{}^B \mathbf{F}] = [{}^B F_x \quad {}^B F_y \quad {}^B F_z \quad {}^B M_x \quad {}^B M_y \quad {}^B M_z]^T \quad (4.26)$$

се означат силите и моментите во однос на произволен координатен систем \mathbf{B} , а со:

$$[{}^B \mathbf{D}] = [{}^B dx \quad {}^B dy \quad {}^B dz \quad {}^B \delta x \quad {}^B \delta y \quad {}^B \delta z]^T \quad (4.27)$$

движењата предизвикани од тие сили и моменти, прикажани исто така во однос на произволниот координатен систем \mathbf{B} , тогаш, имајќи на ум дека:

$$[{}^B \mathbf{D}] = [{}^B \mathbf{J}] \cdot [\mathbf{D}] \quad (4.28)$$

од равенството:

$$[\mathbf{F}]^T \cdot [\mathbf{D}] = [{}^B \mathbf{F}]^T \cdot [{}^B \mathbf{D}] \quad (4.29)$$

се добива:

$$[\mathbf{F}]^T = [{}^B \mathbf{F}]^T \cdot [{}^B \mathbf{J}] \quad (4.30)$$

односно:

$$[\mathbf{F}] = [{}^B \mathbf{J}]^T \cdot [{}^B \mathbf{F}] \quad (4.31)$$

Наместо според (4.31), $[{}^B \mathbf{F}]$ може да се определи според релациите:

$${}^B F_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \quad (4.32)$$

$${}^B F_y = \mathbf{o} \cdot \mathbf{F} \quad (4.33)$$

$${}^B F_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F} \quad (4.34)$$

$${}^B M_x = \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) + \mathbf{M}] \quad (4.35)$$

$${}^B M_y = \mathbf{o} \cdot [(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) + \mathbf{M}] \quad (4.36)$$

$${}^B M_z = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) + \mathbf{M}] \quad (4.37)$$

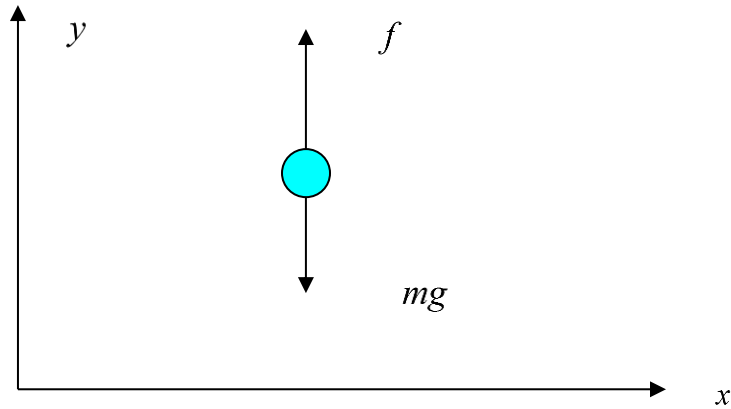
каде што:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} \quad (4.39)$$



4.1. Да се определи равенката на движење на точка со маса m прикажана на Слика 4.1, која може да се движи само вертикално. Под претпоставка, f е надворешна сила која дејствува врз точката.



Слика 4.1. Илустрација кон Задача 4.1

Решение: Точката од Слика 4.1 претставува систем со еден степен слобода на движење. Следствено, нејзиното движење ќе биде опишано со една равенка која може да се изведе било со помош на Нутоновата, било со помош на Лагранжовата механика.

Движењето на точката е во правец на y - оската, па може едноставно да се означи со y . Тогаш кинетичката енергија на точката ќе биде дадена со изразот:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad (4.40)$$

Од друга страна, потенцијалната енергија на точката, која се должи на дејството на Земјината тежа, е пропорционална на масата m , висината на која се наоѓа точката y и Земјиното забрзување g :

$$P = mgy \quad (4.41)$$

Оттаму, Лагранжијанот на набљудуваниот систем ќе има облик:

$$L = K - P = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \quad (4.42)$$

па, со негово диференцирање, се добива:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}$$

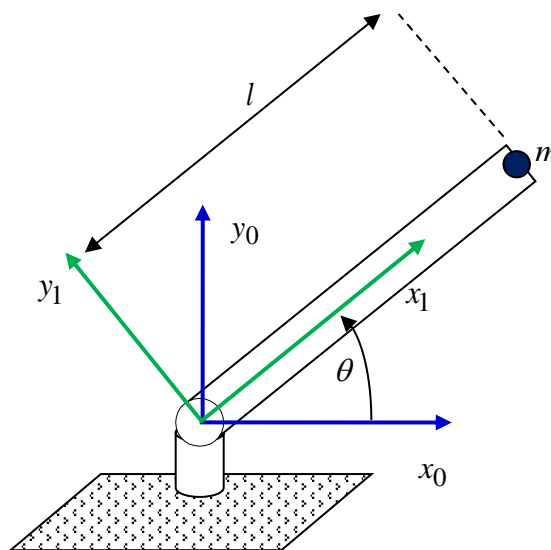
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

$$f = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + mg \quad (4.43)$$

До истиот резултат може да се дојде врз основа на Њутоновиот закон за рамнотежа на силите што дејствуваат врз набљудуваната точка. Имено, надворешната сила која дејствува врз точката f е во рамнотежа со инерционата сила на точката $m\ddot{y}$ и земјината тежа mg :

$$f = m\ddot{y} + mg \quad (4.44)$$

4.2. Дадена е роботската рака од Слика 4.2. Со помош на Лагранжовата механика да се изведе равенката на нејзината динамика. Под претпоставка, должината на раката е l , а масата на раката m е концентрирана во нејзината крајна точка.



Слика 4.2. Илустрација кон Задачата 4.2

Решение: I начин. Движењето на крајната точка од раката има две компоненти:

$$x = l \cos \theta$$

$$y = l \sin \theta \quad (4.45)$$

како и нејзината брзина:

$$v_x = \dot{x} = -l\dot{\theta} \sin \theta$$

$$v_y = \dot{y} = l\dot{\theta} \cos \theta \quad (4.46)$$

Оттука, кинетичката енергија на набљудуваната роботска рака е:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (4.47)$$

За потенцијалната енергија на раката се добива:

$$P = mgl \sin \theta \quad (4.48)$$

па нејзиниот Лагранжијан ќе биде:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \sin \theta \quad (4.49)$$

Бараната динамичка равенка на раката го опишува нејзиното движење во просторот (движењето на нејзината крајна точка) и таа гласи:

$$T = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) + mgl \cos \theta = ml^2\ddot{\theta} + mgl \cos \theta \quad (4.50)$$

II начин. Со оглед на избраниот референтен координатен систем (x_0, y_0, z_0) и правецот на дејствување на земјината тежа, векторот на земјината тежа е:

$$\mathbf{g} = [0 \quad -9.8 \quad 0 \quad 0]^T \quad (4.51)$$

Векторот ${}^1\mathbf{r}_1$, пак, кој ја дефинира положбата на тежиштето од роботската рака во однос на координатниот систем (x_1, y_1, z_1) , е:

$${}^1\mathbf{r}_1 = [l \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (4.52)$$

додека положбата на тежиштето од роботската рака во однос на координатниот систем (x_0, y_0, z_0) , се добива на следниот начин:

$${}^0\mathbf{r}_1 = ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{r}_1) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lC\theta \\ lS\theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Векторот на брзината на тежиштето се определува како извод од неговата положба:

$${}^0\mathbf{v}_1 = {}^0\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{d}{dt} [({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{r}_1)] = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} lC\theta \\ lS\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -lS\theta \\ lC\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (4.54)$$

па, кинетичката енергија на роботската рака се пресметува според формулата:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \int \text{Trag} \left[\left({}^0 \mathbf{v}_1 \right) \left({}^0 \mathbf{v}_1 \right)^T \right] dm = \\
 &= \frac{1}{2} \int \text{Trag} \left\{ \begin{bmatrix} -lS\theta \\ lC\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \begin{bmatrix} -lS\theta & lC\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \right\} dm = \\
 &= \frac{1}{2} \text{Trag} \begin{bmatrix} l^2 S^2 \theta & -l^2 S\theta C\theta & 0 & 0 \\ -l^2 S\theta C\theta & l^2 C^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}^2 m = \\
 &= \frac{1}{2} (l^2 S^2 \theta + l^2 C^2 \theta) \dot{\theta}^2 m = \frac{1}{2} l^2 m \dot{\theta}^2 \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

Потенцијалната енергија на набљудуваната роботска рака е:

$$\begin{aligned}
 P &= -mg \left({}^0 \mathbf{r}_1 \right) = \\
 &= -m \begin{bmatrix} 0 & -9.8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta \\ S\theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 9.8mlS\theta \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

па, соодветната Лагранжова функција ќе биде:

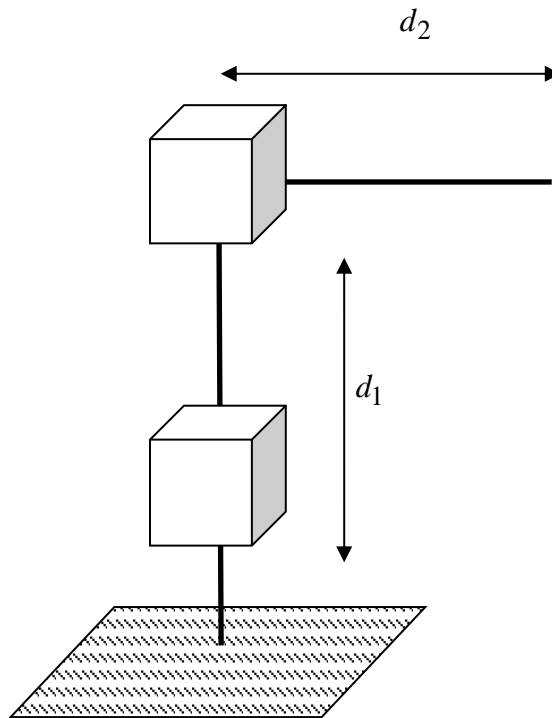
$$L = K - P = \frac{1}{2} l^2 m \dot{\theta}^2 - 9.8mlS\theta \tag{4.57}$$

Оттука:

$$T_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (l^2 m \dot{\theta}) + 9.8mlC\theta = l^2 m \ddot{\theta} + 9.8mlC\theta \tag{4.58}$$

Во горните равенки (4.53)-(4.58) е воведена смената $S\theta = \sin \theta$ и $C\theta = \cos \theta$, заради упростување на изразите.

4.3. Дадена е PP роботската рака од Слика 4.3. Таа се состои од два крака, со маси m_1 и m_2 , соодветно, и два призматични зглоба, чии променливи се d_1 и d_2 , соодветно. Да се определат динамичките равенки на раката.



Слика 4.3. Илустрација кон Задача 4.3

Решение: Кинетичката енергија на набљудуваната роботска рака може да се добие како збир од кинетичките енергии на нејзините два крака:

$$\begin{aligned}
 K &= K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{d}_1^2 + \dot{d}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Соодветно се пресметува и потенцијалната енергија на раката:

$$P = P_1 + P_2 = m_1 g d_1 + m_2 g d_1 = (m_1 + m_2) g d_1 \tag{4.60}$$

Оттука, Лагранжовата функција за набљудуваната роботска рака изнесува:

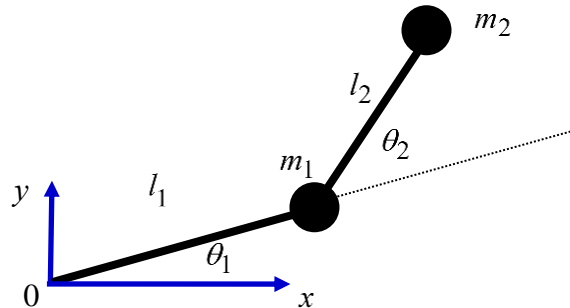
$$L = K - P = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 - (m_1 + m_2) g d_1 \tag{4.61}$$

па, нејзината динамика е опишана со следните две равенки:

$$f_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial d_1} = (m_1 + m_2) \ddot{d}_1 + (m_1 + m_2) g \tag{4.62}$$

$$f_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial d_2} = m_2 \ddot{d}_2 \tag{4.63}$$

4.4. На Слика 4.4 е прикажана роботска рака со два ротациски зглобови. Должините на краците од роботската рака се l_1 и l_2 , а нивните маси се m_1 и m_2 , соодветно. Под претпоставка масата на секој крак е концентрирана во точка на неговиот крај. Да се определи динамичкиот модел на раката.



Слика 4.4. Роботска рака со два степени слобода на движење

Решение: Вкупната кинетичка енергија на роботската рака е збир од кинетичките енергии на нејзините краци:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (4.64)$$

при што брзините на краците се пресметуваат на следниот начин:

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1 = l_1 C_1$$

$$y_1 = l_1 \sin \theta_1 = l_1 S_1$$

$$\dot{x}_1 = -l_1 S_1 \dot{\theta}_1$$

$$\dot{y}_1 = l_1 C_1 \dot{\theta}_1$$

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (4.65)$$

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = l_1 C_1 + l_2 C_{12}$$

$$y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = l_1 S_1 + l_2 S_{12}$$

$$\dot{x}_2 = -l_1 S_1 \dot{\theta}_1 - l_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 C_1 \dot{\theta}_1 + l_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 C_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \quad (4.66)$$

Оттука:

$$K = \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \quad (4.67)$$

Потенцијалната енергија на набљудуваната роботска рака ќе претставува збир од потенцијалните енергии на краците:

$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = m_1gl_1S_1$$

$$P_2 = m_2gl_1S_1 + m_2gl_2S_{12}$$

$$P = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2)gl_1S_1 + m_2gl_2S_{12} \quad (4.68)$$

при што како линија на нулева потенцијална енергија е усвоена оската на ротација „0“. Лагранжијанот оператор за дадената роботска рака е:

$$L = K - P =$$

$$= \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_1 + m_2)gl_1S_1 - m_2gl_2S_{12} \quad (4.69)$$

па со негово диференцирање во согласност со (4.1) и (4.2):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \left[(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2C_2 \right] \dot{\theta}_1 + (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2)\dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left[(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2C_2 \right] \ddot{\theta}_1 + (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2)\ddot{\theta}_2 -$$

$$- 2m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_2 - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2S_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2)gl_1C_1 - m_2gl_2C_{12} \quad (4.70)$$

за ротациското движење на првиот крак се добива:

$$T_1 = \left[(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2C_2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left(m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 \right) \ddot{\theta}_2 - 2m_2l_1l_2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2l_1l_2S_2\dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2)gl_1C_1 + m_2gl_2C_{12} \quad (4.71)$$

На сличен начин се определува и равенката за ротациското движење на вториот крак:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \left(m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 \right) \dot{\theta}_1 + m_2l_2^2\dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \left(m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 \right) \ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2l_1l_2S_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - m_2gl_2C_{12} \quad (4.72)$$

$$T_2 = \left(m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 \right) \ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2S_2\dot{\theta}_1^2 + m_2gl_2C_{12} \quad (4.73)$$

Добиениот динамички модел на роботската рака од Слика 4.4 може да се претстави во следниот матричен облик:

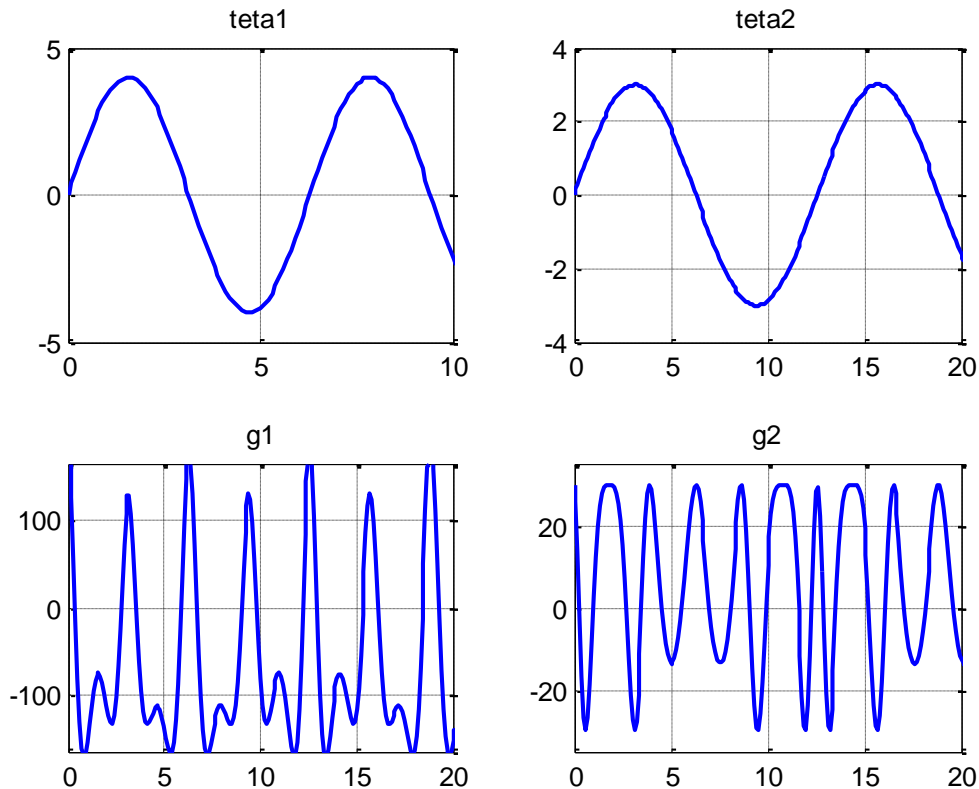
$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2C_2 & m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 \\ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_2l_1l_2S_2 \\ m_2l_1l_2S_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2S_2 & -m_2l_1l_2S_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1C_1 + m_2gl_2C_{12} \\ m_2gl_2C_{12} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

4.5. Дадена е рамнинската роботска рака од Сликата 4.4. Графички да се прикажат гравитациските сили и моменти кои дејствуваат врз раката, ако $l_1 = 2m$, $l_2 = 1m$, $m_1 = 5kg$, $m_2 = 3kg$, $\theta_1 = 4 \sin(t)$, $\theta_2 = 4 \sin(0.5t)$ и $g = 9.81 \frac{m}{s}$. За рамнина на нулта потенцијална енергија да се усвои рамнината $\theta = 0$.

Решение: Динамичкиот модел на оваа рака е пресметан во претходната задача и е даден со (4.74). Оттука, гравитацискиот вектор на раката е:

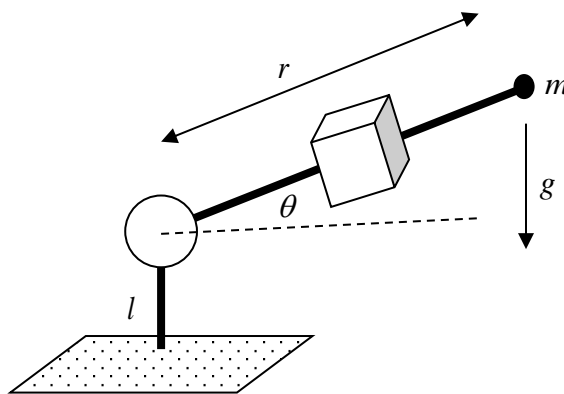
$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1C_1 + m_2gl_2C_{12} \\ m_2gl_2C_{12} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Гравитациските сили и моменти кои дејствуваат врз дадената роботска рака се претставени со векторот \mathbf{g} и истите графички се прикажани на Слика 4.5.



Слика 4.5. Гравитациските моменти на роботската рака од Задача 4.5

4.6. Дадена е рамнинската роботска рака од Слика 4.6. Раката поседува два крака со должини l и r , соодветно и два зглоба – ротациски и транслаторен. Да се усвои дека масата на краците m е концентрирана во точка на крајот од вториот крак. Нејзиниот момент на инерција во однос на оската на ротација е $J = mr^2$.



Слика 4.6. Илустрација кон Задача 4.6

Да се пресметаат матрицата на инерции, векторот на Кориолисови и центрифугални сили и гравитацискиот вектор за оваа роботска рака. Графички

да се прикажат гравитациските сили и моменти кои дејствуваат врз раката, ако $l = 1m$, $r = 0.5m$, $m = 1kg$ и $g = 9.81 \frac{m}{s}$. За рамнина на нулта потенцијална енергија да се усвои рамнината $\theta = 0$.

Решение: Векторот на променливите на зглобовите на роботската рака е $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta \\ r \end{bmatrix}$, векторот на брзините на зглобовите на роботската рака е $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r} \end{bmatrix}$,

додека векторот на влезовите е $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix}$. Вкупната кинетичка енергија на роботската рака претставува збир од кинетичката енергија на ротациското движење со брзина $\dot{\theta}$ и линеарното движење со брзина \dot{r} и изнесува:

$$K = K_{rot} + K_{lin} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad (4.76)$$

додека потенцијалната енергија е:

$$P = mgr \sin(\theta) \quad (4.77)$$

Следствено, за Лагранжијанот и неговите изводи се добива:

$$L = K - P = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - mgr \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m r^2 \dot{\theta} \\ m \dot{r} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \begin{bmatrix} m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} \\ m \ddot{r} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -mgr \cos \theta \\ m r \dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

па бараниот модел на динамиката на роботската рака ќе биде:

$$m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + mgr \cos \theta = \tau$$

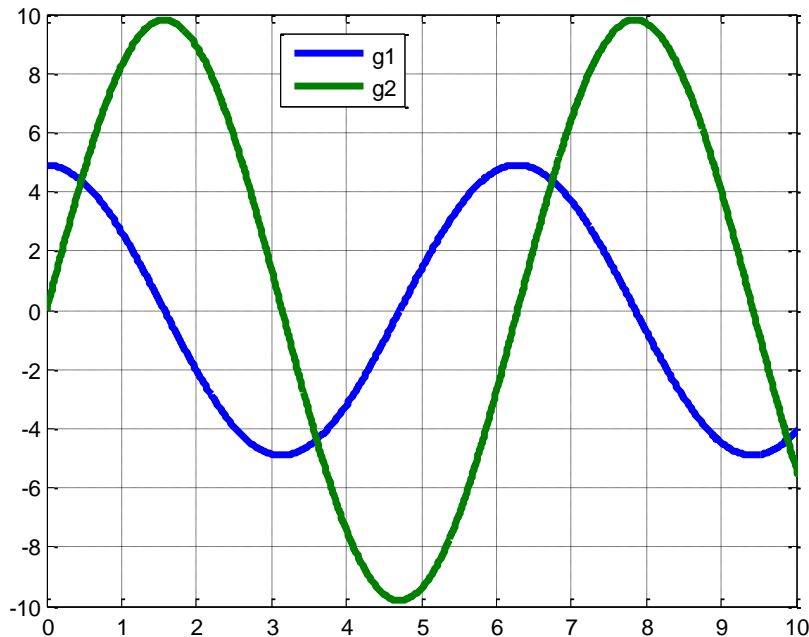
$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + mg \sin \theta = f \quad (4.79)$$

или, во матричен облик:

$$\begin{bmatrix} m r^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 m r \dot{r} \dot{\theta} \\ -m r \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgr \cos \theta \\ mg \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.80)$$

Гравитациските сили и моменти кои дејствуваат врз дадената роботска рака се претставени со векторот $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ и истите графички се прикажани на Слика 4.7:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} mgr \cos \theta \\ mg \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5g \cos \theta \\ g \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.9 \cos \theta \\ 9.81 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.81)$$



Слика 4.7. Гравитациските сили и моменти за дадената RP роботска рака

4.7. Да се определи динамичкиот модел на роботската рака од Слика 4.3 преку нејзиниот D-H модел.

Решение: Општиот облик на динамичкиот модел на набљудуваната роботска рака гласи:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.82)$$

каде што $\boldsymbol{\tau}$ е вектор на генерализираните сили и моменти кои дејствуваат врз раката со димензија $n \times 1$, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е инерциската матрица на роботската рака со димензија $n \times n$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ е векторот на Кориолисови и центрифугални сили со димензија $n \times 1$, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ е гравитацискиот вектор со димензија $n \times 1$, \mathbf{q} е вектор на генерализираните променливи на зглобовите од роботската рака, $\dot{\mathbf{q}}$ е вектор на нивната брзина и $\ddot{\mathbf{q}}$ е вектор на забрзувањето на променливите на зглобовите од роботската рака. Во конкретниот случај роботската рака се состои од два крути крака и два крути транслаторни зглоба, па ќе важи:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{d}_1^2 \\ \dot{d}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \dot{d}_2 \\ \dot{d}_2 \dot{d}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

каде што:

$$D_{11} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + \text{Trag}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) \quad (4.88)$$

$$D_{12} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) \quad (4.89)$$

$$D_{21} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) \quad (4.90)$$

$$D_{22} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) \quad (4.91)$$

$$D_{111} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{111} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + \text{Trag}(\mathbf{U}_{211} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) \quad (4.92)$$

$$D_{122} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{222} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) \quad (4.93)$$

$$D_{112} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{212} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) \quad (4.94)$$

$$D_{211} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{211} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) \quad (4.95)$$

$$D_{222} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{222} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) \quad (4.96)$$

$$D_{212} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{212} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) \quad (4.97)$$

$$D_1 = -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{11} \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{21} \mathbf{r}_2 \quad (4.98)$$

$$D_2 = -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{12} \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{22} \mathbf{r}_2 \quad (4.99)$$

D-H параметрите за дадената роботска рака се:

i	θ	d	a	α
1	-90°	d_1	0	-90°
2	0°	d_2	0	0°

Оттука:

$$\mathbf{A}_1 = {}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C\alpha_1 & S\theta_1 S\alpha_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C\alpha_1 & -C\theta_1 S\alpha_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

$$\mathbf{A}_2 = {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C\alpha_2 & S\theta_2 S\alpha_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C\alpha_2 & -C\theta_2 S\alpha_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = ({}^0\mathbf{T}_1)({}^1\mathbf{T}_2) = {}^0\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

па за матриците \mathbf{U}_{ij} и \mathbf{U}_{ijk} се добива:

$$\mathbf{U}_{11} = \mathbf{Q}_{trans} \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

$$\mathbf{U}_{21} = \mathbf{Q}_{trans} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

$$\mathbf{U}_{12} = \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \theta_2} = 0 \quad (4.105)$$

$$\mathbf{U}_{22} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_{rot} \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

$$\mathbf{U}_{111} = \frac{\partial(\mathbf{QA}_1)}{\partial \theta_1} = \mathbf{QQA}_1 = 0 \quad (4.107)$$

$$\mathbf{U}_{112} = \frac{\partial(\mathbf{QA}_1)}{\partial \theta_2} = \mathbf{0} \quad (4.108)$$

$$\mathbf{U}_{211} = \frac{\partial(\mathbf{QA}_1 \mathbf{A}_2)}{\partial \theta_1} = \mathbf{QQA}_1 \mathbf{A}_2 = 0 \quad (4.109)$$

$$\mathbf{U}_{212} = \frac{\partial(\mathbf{QA}_1 \mathbf{A}_2)}{\partial \theta_2} = \mathbf{QA}_1 \mathbf{QA}_2 = 0 \quad (4.110)$$

$$\mathbf{U}_{221} = \frac{\partial(\mathbf{A}_1 \mathbf{QA}_2)}{\partial \theta_1} = \mathbf{QA}_1 \mathbf{QA}_2 = 0 \quad (4.111)$$

$$\mathbf{U}_{222} = \frac{\partial(\mathbf{A}_1 \mathbf{QA}_2)}{\partial \theta_2} = \mathbf{A}_1 \mathbf{QQA}_2 = 0 \quad (4.112)$$

Останатите елементи на наблюдаваната роботска рака се:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

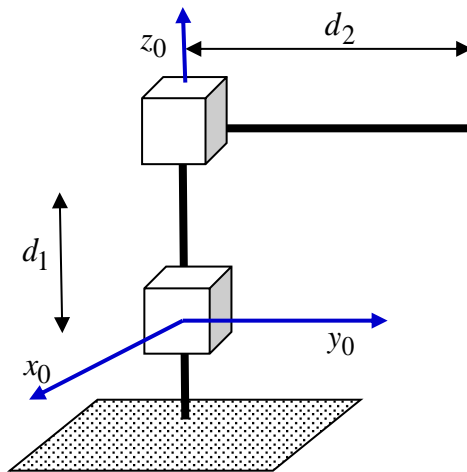
$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

па, за нејзиниот динамички модел се добива:

$$\begin{aligned} F_1 &= D_{11}\ddot{d}_1 + D_{12}\ddot{d}_2 + D_{111}\dot{d}_1^2 + D_{122}\dot{d}_2^2 + 2D_{112}\dot{d}_1\dot{d}_2 + D_1 = \\ &= (m_1 + m_2)\ddot{d}_1 + (m_1 + m_2)g \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$F_2 = D_{21}\ddot{d}_1 + D_{22}\ddot{d}_2 + D_{211}\dot{d}_1^2 + D_{222}\dot{d}_2^2 + 2D_{212}\dot{d}_1\dot{d}_2 + D_2 = m_2\ddot{d}_2 \quad (4.119)$$

4.8. Да се состави модел во просторот на состојби и да се определат рамнотежните состојби на РР роботската рака од Слика 4.8. Раката поседува два транслаторни зглоба, чии променливи се d_1 и d_2 , соодветно.



Слика 4.8. РР роботска рака од Задача 4.8

Решение: Динамичкиот модел на набљудуваната роботска рака е:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 \quad (4.120)$$

$$P = (m_1 + m_2)gq_1 \quad (4.121)$$

$$L = K - P = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - (m_1 + m_2)gq_1 \quad (4.122)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\dot{q}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 \quad (4.123)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2\dot{q}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = m_2\ddot{q}_2 \quad (4.124)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + m_2)g \quad (4.125)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad (4.126)$$

$$\tau_1 = (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + (m_1 + m_2)g \quad (4.127)$$

$$\tau_2 = m_2\ddot{q}_2 \quad (4.128)$$

каде што τ_1 и τ_2 се надворешните сили кои дејствуваат во зглобовите. Во просторот на состојби овој модел гласи:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \frac{\tau_1 - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} \\ \dot{q}_2 \\ \frac{\tau_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

а неговите рамнотежни состојби се:

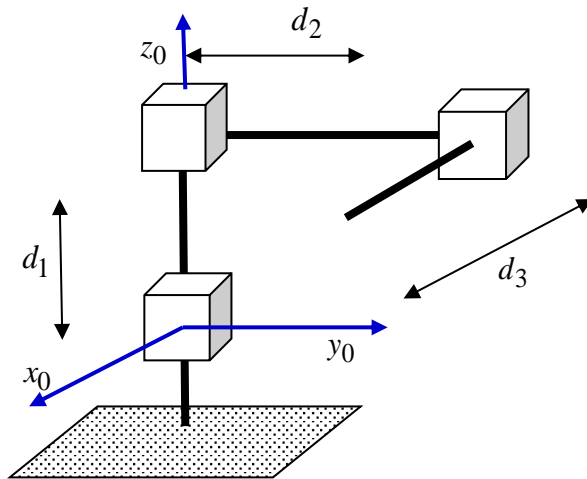
$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0 \quad (4.130)$$

$$\tau_1 = (m_1 + m_2)g = \text{const.}; \quad \tau_2 = 0 \quad (4.131)$$

и ги има бесконечно многу.

4.9. Дадена е просторната транслациска роботска рака од Слика 4.9. Раката е составена од три взаемно нормални краци и три трансляторни зглоба, кои ѝ овозможуваат да се движи во тридимензионалниот Евклидски простор. Да се претпостави дека масите на краците се концентрирани во точки на краевите од

краците и изнесуваат m_1 , m_2 и m_3 , соодветно. Да се определи динамичкиот модел на оваа роботска рака. Потоа да се состави нејзин модел во просторот на состојби и да се определат нејзините рамнотежни состојби.



Слика 4.9. PPP роботска рака од Задача 4.9

Решение: Векторот на положба на зглобовите од раката е:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

Кинетичката енергија на раката $K(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}})$ може да се претстави како збир од кинетичките енергии на нејзините краци:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) &= K_1(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) + K_2(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) + K_3(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) = \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{d}_1^2 + \dot{d}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{d}_1^2 + \dot{d}_2^2 + \dot{d}_3^2) = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{d}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{d}_3^2 \end{aligned} \quad (4.133)$$

додека нејзината потенцијална енергија изнесува:

$$P(\mathbf{d}) = (m_1 + m_2 + m_3) g d_1 \quad (4.134)$$

Оттука:

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) &= K(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) - P(\mathbf{d}) = \\
 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{d}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{d}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{d}_3^2 - \\
 &\quad - (m_1 + m_2 + m_3)gd_1 \\
 \frac{\partial}{\partial \dot{d}_1} L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) &= (m_1 + m_2 + m_3)\dot{d}_1 \\
 \frac{\partial}{\partial \dot{d}_2} L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) &= (m_2 + m_3)\dot{d}_2 \\
 \frac{\partial}{\partial \dot{d}_3} L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) &= m_3\dot{d}_3 \\
 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{d}_1} L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) \right] &= (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{d}_1 \\
 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{d}_2} L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) \right] &= (m_2 + m_3)\ddot{d}_2 \\
 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{d}_3} L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) \right] &= m_3\ddot{d}_3 \\
 \frac{\partial}{\partial d_1} L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) &= -(m_1 + m_2 + m_3)g \\
 \frac{\partial}{\partial d_2} L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial d_3} L(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

па за динамичкиот модел на набљудуваната роботска рака се добива:

$$f_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{d}_1 + (m_1 + m_2 + m_3)g$$

$$f_2 = (m_2 + m_3)\ddot{d}_2$$

$$f_3 = m_3 \ddot{d}_3 \quad (4.136)$$

каде што f_1 , f_2 и f_3 се силите кои дејствуваат во зглобовите. Во просторот на состојби овој модел гласи:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dot{d}_1 \\ d_2 \\ \dot{d}_2 \\ d_3 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \ddot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \ddot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \frac{f_1 - (m_1 + m_2 + m_3)g}{m_1 + m_2 + m_3} \\ \dot{d}_2 \\ \frac{f_2}{m_2 + m_3} \\ \dot{d}_3 \\ \frac{f_3}{m_3} \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

Рамнотежните состојби на набљудуваната роботска рака се добиваат од условот:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dot{d}_1 \\ d_2 \\ \dot{d}_2 \\ d_3 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \dot{d}_1 = 0 \\ \dot{d}_2 = 0 \\ \dot{d}_3 = 0 \\ f_1 = (m_1 + m_2 + m_3)g \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases} \quad (4.138)$$

и читателот лесно може да се увери дека ги има бесконечно многу.

4.10. Да се определи инерциската матрица и нејзините особини за роботската рака од Задача 4.9. Потоа да се извлече заклучок од фактот дека за матрицата:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{d}) - \mathbf{C}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) \quad (4.139)$$

важи:

$$\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T \quad (4.140)$$

Решение: Инерциската матрица на дадената роботска рака е:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

Таа е симетрична матрица:

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \quad (4.142)$$

и позитивно дефинитна:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \cdot \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \\ &= [(m_1 + m_2 + m_3)x_1 \quad (m_2 + m_3)x_2 \quad m_3x_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \\ &= (m_1 + m_2 + m_3)x_1^2 + (m_2 + m_3)x_2^2 + m_3x_3^2 > 0 \quad \forall \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.143)$$

Инерционата матрица M е ограничена и од лево и од десно:

$$\mu_1 \mathbf{I} \leq \mathbf{M} \leq \mu_2 \mathbf{I} \quad (4.144)$$

при што $\mu_1 = m_3$ и $\mu_2 = m_1 + m_2 + m_3$ се најмалата и најголемата сопствена вредност на инерционата матрица.

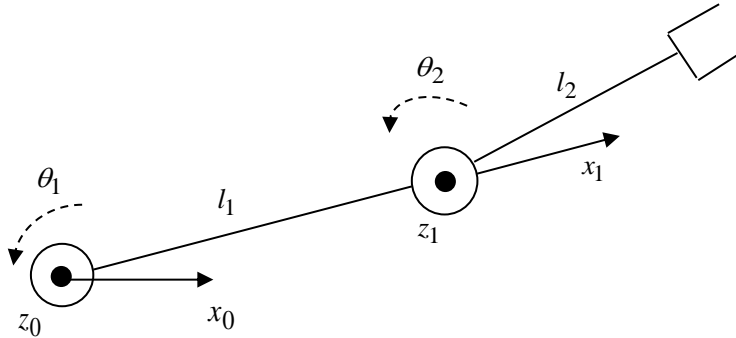
Од дадениот услов во задачата следува дека:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} + \mathbf{W}^T &= \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{d}) - \mathbf{C}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) \right] + \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{d}) - \mathbf{C}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) \right]^T = \\ &= \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{d}) \right] + \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{d}) \right]^T = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.145)$$

инерциската матрица е константна, што може лесно да се види од изразот (4.142).

4.11. Дадена е рамнинската роботска рака од Слика 4.10. Конфигурацијата на раката е RR, што значи дека таа има два ротациски зглоба. Нека m_1 и m_2 се масите на првиот и вториот крак, соодветно, а I_1 и I_2 се нивните моменти на

инерција дефинирани секој во однос на соодветното тежиште. Должините на краците од роботската рака се $l_1 = 8$ и $l_2 = 4$, а нивните тежишта се наоѓаат на растојание $l_{c1} = 4$ односно $l_{c2} = 2$ од почетокот на кракот. Да се состави динамички модел на оваа рака, под претпоставка дека во зглобовите дејствуваат вртливите моменти T_1 и T_2 , соодветно.



Слика 4.10. Илустрација кон Задача 4.11

Решение: Вкупната кинетичка енергија на набљудуваната роботска рака може да се претстави како збир од кинетичките енергии на одделните краци:

$$K = K_1 + K_2 = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \right) + \left[\frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \right] \quad (4.146)$$

каде што v_1 и v_2 се линеарните брзини, а $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$ се аголните брзини на краците, соодветно. Брзината v_1 на првиот крак е дадена со изразот:

$$v_1 = l_{c1} \dot{\theta}_1 = 4 \dot{\theta}_1 \quad (4.147)$$

додека брзината v_2 на вториот крак се определува преку положбата на неговото тежиште:

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 C_1 + l_{c2} C_2 = 8C_1 + 2C_{12} \\ y_2 &= l_1 S_1 + l_{c2} S_2 = 8S_1 + 2S_{12} \end{aligned} \quad (4.148)$$

па, следствено:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \left[(-8S_1 - 2S_{12}) \dot{\theta}_1 - 2S_{12} \dot{\theta}_2 \right]^2 + \left[(8C_1 + 2C_{12}) \dot{\theta}_1 + 2C_{12} \dot{\theta}_2 \right]^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= (64S_1^2 + 32S_1S_{12} + 4S_{12}^2)\dot{\theta}_1^2 + 8S_{12}(4S_1 + S_{12})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 4S_{12}^2\dot{\theta}_2^2 + \\
 &+ (64C_1^2 + 32C_1C_{12} + 4C_{12}^2)\dot{\theta}_1^2 + 8C_{12}(4C_1 + C_{12})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 4C_{12}^2\dot{\theta}_2^2 = \\
 &= (68 + 32C_2)\dot{\theta}_1^2 + 8(1 + 4C_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 4\dot{\theta}_2^2
 \end{aligned} \tag{4.149}$$

Оттука:

$$K = \frac{1}{2}\Gamma_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\Gamma_2\dot{\theta}_2^2 + \Gamma_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 16m_2C_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \tag{4.150}$$

каде што:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= 16m_1 + 68m_2 + I_1 + I_2 \\
 \Gamma_2 &= 4m_2 + I_2
 \end{aligned} \tag{4.151}$$

Потенцијалната енергија на роботската рака се пресметува на следниот начин:

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 = \\
 &= m_1gl_{c1}S_1 + m_2g(l_1S_1 + l_{c2}S_{12}) = \\
 &= 4m_1gS_1 + m_2g(8S_1 + 2S_{12})
 \end{aligned} \tag{4.152}$$

Следствено, за Лагранжијанот на роботската рака се добива:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2}\Gamma_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\Gamma_2\dot{\theta}_2^2 + \Gamma_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 16m_2C_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - 4m_1gS_1 - m_2g(8S_1 + 2S_{12}) \\
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \Gamma_1\dot{\theta}_1 + \Gamma_2\dot{\theta}_2 + 16m_2C_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= \Gamma_2\dot{\theta}_2 + \Gamma_2\dot{\theta}_1 + 16m_2C_2(\dot{\theta}_1) \\
 \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -4m_1gC_1 - m_2g(8C_1 + 2C_{12}) \\
 \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -16m_2S_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - m_2g(2C_{12}) \\
 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= \Gamma_1\ddot{\theta}_1 + \Gamma_2\ddot{\theta}_2 + 16m_2C_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - 16m_2S_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 \\
 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) &= \Gamma_2\ddot{\theta}_2 + \Gamma_2\ddot{\theta}_1 + 16m_2C_2\ddot{\theta}_1 - 16m_2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
 \end{aligned} \tag{4.153}$$

Динамичкиот модел на набљудуваната роботска рака се состои од следните две диференцијални равенки:

$$\begin{aligned} T_1 &= (\Gamma_1 + 32m_2C_2)\ddot{\theta}_1 + (\Gamma_2 + 16m_2C_2)\ddot{\theta}_2 - \\ &- 16m_2S_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 + 4m_1gC_1 + 2m_2g(4C_1 + C_{12}) \\ T_2 &= (\Gamma_2 + 16m_2C_2)\ddot{\theta}_1 + \Gamma_2\ddot{\theta}_2 + 16m_2S_2\dot{\theta}_1^2 + 2m_2gC_{12} \end{aligned} \quad (4.154)$$

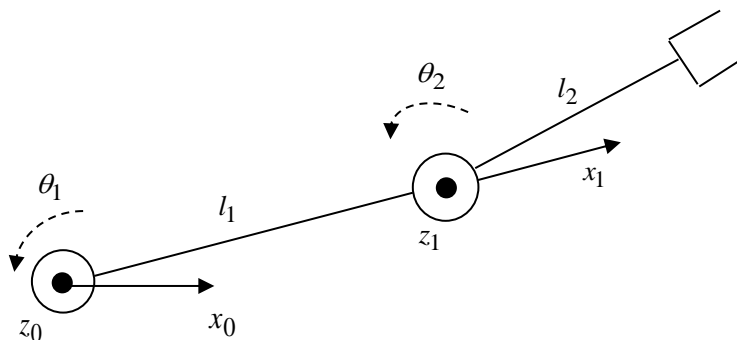
и тој може да се запише во следниот стандарден матричен облик:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{T} \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Gamma_1 + 32m_2C_2 & \Gamma_2 + 16m_2C_2 \\ \Gamma_2 + 16m_2C_2 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -32m_2S_2\dot{\theta}_2 & -16m_2S_2\dot{\theta}_2 \\ 16m_2S_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 4m_1gC_1 + 2m_2g(4C_1 + C_{12}) \\ 2m_2gC_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.156)$$

4.12. Со помош на Лагранжовата механика да се определи динамиката на рамнинската роботска рака од Слика 4.11. Заради едноставност во пресметките, секој крак i од дадената роботска рака се моделира како хомоген правоаголен

стап со маса m_i и инерциски тензор $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} I_{x,i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y,i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z,i} \end{bmatrix}$; $i = 1, 2$. Тежиштето на секој крак се наоѓа на половина од неговата должина.



Слика 4.11. Рамнинска роботска рака со 2 степени слобода на движење

Решение: Нека координатите на тежиштето на првиот крак се означат со x_1 и y_1 , а на вториот крак со x_2 и y_2 . Тогаш од Сликата 4.11 непосредно следува:

$$\begin{aligned}x_1 &= r_1 \cos \theta_1 = r_1 C_1 \\y_1 &= r_1 \sin \theta_1 = r_1 S_1 \\x_2 &= l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = l_1 C_1 + r_2 C_{12} \\y_2 &= l_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = l_1 S_1 + r_2 S_{12}\end{aligned}\quad (4.157)$$

Кинетичката енергија на раката може да се претстави како збир од кинетичките енергии на краците K_1 и K_2 , при што:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^T \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}_1 \\K_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2^T \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}_2\end{aligned}\quad (4.158)$$

Во горните изрази $v_1^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1$ и $v_2^2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2$, при што \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 се линеарните брзини на краците, а $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ се нивните вектори на аглови брзини. Бидејќи дадената роботска рака е рамнинска, v_1 и v_2 ќе имаат само x и y координати, а бидејќи векторите $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ се во правец на z -оската, тие ќе имаат само z координата.

Оттука:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -r_1 S_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 &= r_1 C_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 &= -l_1 S_1 \dot{\theta}_1 - r_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{y}_2 &= l_1 C_1 \dot{\theta}_1 + r_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = r_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 r_2 C_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \\ K_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_{z,1} \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{z,1} \dot{\theta}_1^2 \\ K_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_{z,2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 l_1 r_2 C_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} I_{z,2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\end{aligned}\quad (4.159)$$

Потенцијалните енергии на краците се:

$$\begin{aligned} P_1 &= m_1 r_1 g S_1 \\ P_2 &= m_2 l_1 g S_1 + m_2 r_2 g S_{12} \end{aligned} \quad (4.160)$$

па, за Лагранжијанот на зададената роботска рака се добива:

$$\begin{aligned} L &= K - P = (K_1 + K_2) - (P_1 + P_2) = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,1} + I_{z,2}) \dot{\theta}_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (m_2 r_2^2 + I_{z,2}) \dot{\theta}_2^2 + (m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,2}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\ &- (m_1 r_1 + m_2 l_1) g S_1 - m_2 r_2 g S_{12} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,1} + I_{z,2}) \dot{\theta}_1 + \\ &+ (m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,2}) \dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= (m_2 r_2^2 + I_{z,2}) \dot{\theta}_2 + (m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,2}) \dot{\theta}_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,1} + I_{z,2}) \ddot{\theta}_1 + \\ &+ (m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,2}) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{\theta}_2^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= (m_2 r_2^2 + I_{z,2}) \ddot{\theta}_2 + (m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,2}) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -(m_1 r_1 + m_2 l_1) g C_1 - m_2 r_2 g C_{12} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 r_2 g C_{12} \end{aligned} \quad (4.161)$$

Бараниот динамички модел е:

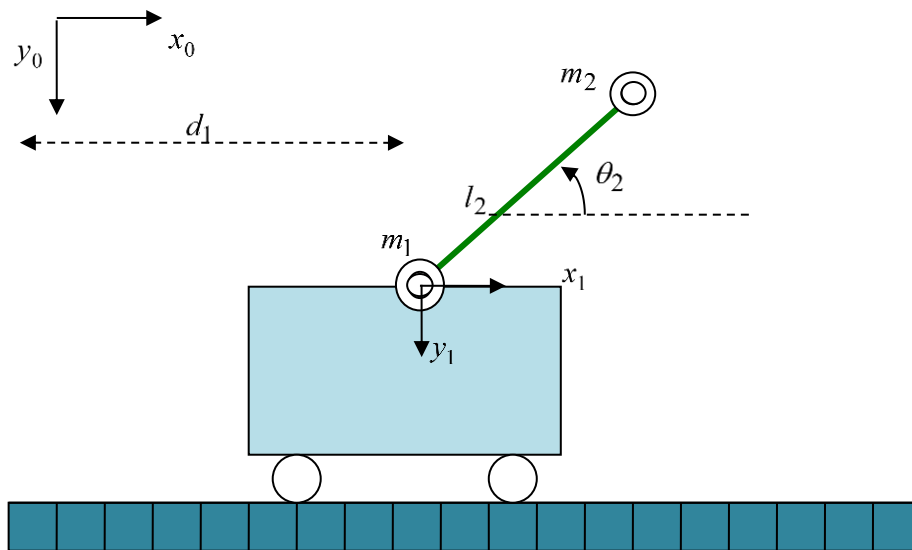
$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \\ &= (m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,1} + I_{z,2}) \ddot{\theta}_1 + \\ &+ (m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,2}) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{\theta}_2^2 + \end{aligned}$$

$$+ (m_1 r_1 + m_2 l_1) g C_1 + m_2 r_2 g C_{12}$$

$$T_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} =$$

$$= (m_2 r_2^2 + I_{z,2}) \ddot{\theta}_2 + (m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 C_2 + I_{z,2}) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 r_2 g C_{12} \quad (4.162)$$

4.13. На Слика 4.12 е прикажано инвертирано нишало поставено на количка. Рамнината на движењето е рамнината (x_0, z_0) . Количката се движи во правец на z_0 -оската и ова движење е претставено со растојанието d_1 . Оската на ротација на нишалото е оската z_1 . Масата на количката е m_1 , а на нишалото изнесува m_2 . Под претпоставка, масите m_1, m_2 се концентрирани во соодветните точки. Системот може да се моделира со роботска рака со PR конфигурација, каде што количката го претставува призматичниот зглоб, а нишалото – ротациониот. Да се состави динамичкиот модел на оваа роботска рака и да се дефинираат матрицата на инерции \mathbf{M} и гравитациониот вектор \mathbf{g} на системот.



Слика 4.12. Илустрација кон Задача 4.13

Решение: Ако со x_1 и y_1 се означат координатите на масата m_1 , а со x_2 и y_2 се означат координатите на масата m_2 , тогаш кинетичката енергија на системот може да се претстави како збир од кинетичките енергии на масите m_1 и m_2 :

$$K = K_1 + K_2 = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 \quad (4.163)$$

каде што v_1 е брзината на масата m_1 и v_2 е брзината на масата m_2 :

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \quad (4.164)$$

Од Слика 4.12 непосредно следува:

$$x_1 = d_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{d}_1$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow \dot{y}_1 = 0$$

$$x_2 = d_1 + L_2 \cos \theta_2 = d_1 + L_2 C_2 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2 = \dot{d}_1 - L_2 S_2 \dot{\theta}_2$$

$$y_2 = -L_2 \sin \theta_2 = -L_2 S_2 \Rightarrow$$

$$\dot{y}_2 = -L_2 C_2 \dot{\theta}_2 \quad (4.165)$$

па за кинетичките енергии на масите m_1 и m_2 се добива:

$$K_1 = \frac{m_1}{2} \dot{d}_1^2$$

$$K_2 = \frac{m_2}{2} \left[\dot{d}_1^2 + L_2^2 (C_2^2 + S_2^2) \dot{\theta}_2^2 - 2L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 \right] = \frac{m_2}{2} \left(\dot{d}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - 2L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 \right) \quad (4.166)$$

Вкупната кинетичка енергија на набљудуваниот систем е:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{m_1}{2} \dot{d}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{d}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - 2L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 \right) \quad (4.167)$$

или по средовањето:

$$K = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{d}_1^2 + \frac{m_2}{2} L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 \quad (4.168)$$

Потенцијалната енергија на системот може да се претстави како збир од потенцијалните енергии:

$$P = P_1 + P_2 \quad (4.169)$$

каде што:

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = -m_2 g L_2 S_2 \quad (4.170)$$

Лагранжијанот за набљудуваниот систем е даде со изразот:

$$L = K - P = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{d}_1^2 + \frac{m_2}{2} L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 g L_2 S_2 \quad (4.171)$$

Равенките на движењето на набљудуваниот систем од Слика 4.12 се:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial d_1} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \quad (4.172)$$

каде што:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} = (m_1 + m_2) \dot{d}_1 - m_2 L_2 S_2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2 - m_2 L_2 S_2 \dot{d}_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{d}_1 - m_2 L_2 S_2 \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 L_2 S_2 \ddot{d}_1 - m_2 L_2 C_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 g L_2 C_2 \quad (4.173)$$

Динамичкиот модел на роботската рака е:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) \ddot{d}_1 - m_2 L_2 S_2 \ddot{\theta}_2 \\ m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 L_2 S_2 \ddot{d}_1 - m_2 L_2 C_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 g L_2 C_2 \end{bmatrix} \quad (4.174)$$

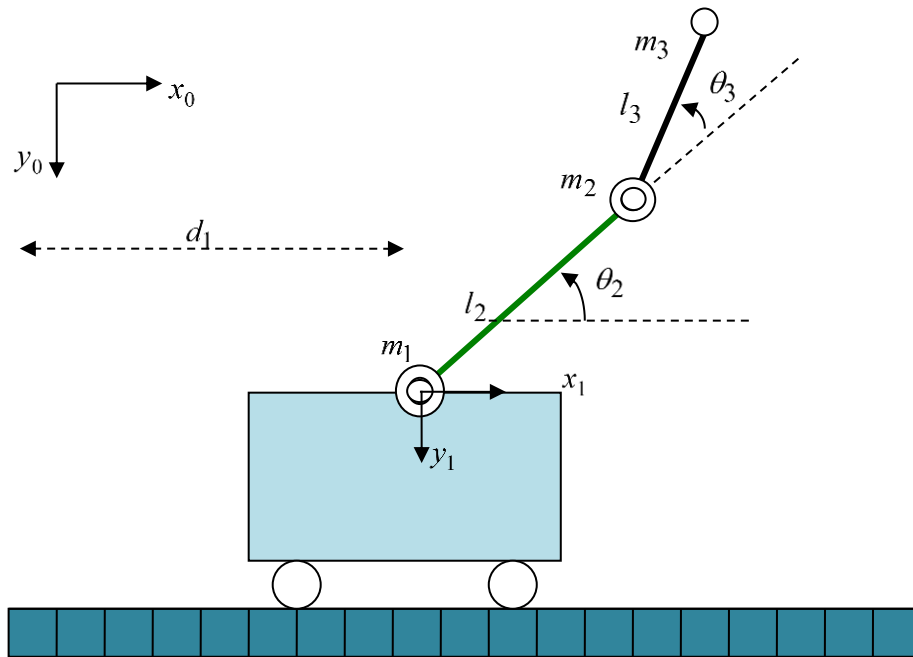
Бараната матрица на масите \mathbf{M} е:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & -m_2 L_2 S_2 \\ -m_2 L_2 S_2 & m_2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.175)$$

додека гравитацискиот вектор \mathbf{G} е:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g L_2 C_2 \end{bmatrix} \quad (4.176)$$

4.14. Дадена е подвижната роботска рака од типот PRR прикажана на Слика 4.13. Под претпоставка, m_1, m_2, m_3 се концентрирани маси во соодветните точки.



Слика 4.13. Илустрација кон Задача 4.14

а) Да се определи Јакобијанот на дадената роботска рака во однос на референтниот координатен систем 0U , кој ја определува врската помеѓу брзината на извршниот елемент и брзините на зглобовите од раката. Упатство: за работни координати да се усвојат x, y и $\alpha = \theta_2 + \theta_3$.

б) Да се определат сингуларитетите на проблемот и да се даде нивното физичко толкување.

в) Да се определат матрицата на кинетички енергии $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$ и

гравитацискиот вектор $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$ од моделот на движењето на набљудуваниот робот:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \dot{d}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix} + \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_1 \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (4.177)$$

Решение: а) Задачата може да се реши геометриски. Така, врз основа на Слика 4.13, за x координатата и y координатата на извршниот елемент од роботската рака во однос на координатниот систем $\{0\}$ важи:

$$\begin{aligned} x &= d_1 + L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = d_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23} \\ y &= -L_2 \sin \theta_2 - L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) = -L_2 S_2 - L_3 S_{23} \end{aligned} \quad (4.178)$$

а од условот на задачата:

$$\alpha = \theta_2 + \theta_3 \quad (4.179)$$

Со диференцирање на горните три равенки по времето се добива:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{d}_1 - L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 - L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) = \dot{d}_1 - L_2 S_2 \dot{\theta}_2 - L_3 S_{23}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{y} &= -L_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 - L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) = -L_2 C_2 \dot{\theta}_2 - L_3 C_{23}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{\alpha} &= \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (4.180)$$

па, бараниот Јакобијан е:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial d_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial d_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial d_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -L_2 C_2 - L_3 C_{23} & -L_3 C_{23} \\ 1 & -L_2 S_2 - L_3 S_{23} & -L_3 S_{23} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.181)$$

б) Сингуларитетите се јавуваат кога детерминантата на Јакобијанот е нула:

$$\det \mathbf{J} = 0 \Rightarrow L_2 C_2 = 0 \quad (4.182)$$

Оттука:

$$C_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = 90^0 \quad (4.183)$$

Сингуларитетот настапува кога $\theta_2 = 90^0$. Тогаш брзините \dot{y} и \dot{x} стануваат зависни. Исто така, за $\theta_2 = 90^0$ и $\theta_3 = 0^0$ не постои движење во правец на y -оската.

в) Ако со x_1 и y_1 се означат координатите на масата m_1 , со x_2 и y_2 се означат координатите на масата m_2 и со x_3 и y_3 се означат координатите на масата m_3 , тогаш кинетичката енергија на системот може да се претстави како збир од кинетичките енергии на масите m_1 , m_2 и m_3 :

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 + \frac{m_3}{2} v_3^2 \quad (4.184)$$

каде што v_1 е брзината на масата m_1 , v_2 е брзината на масата m_2 и v_3 е брзината на масата m_3 :

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \\ v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\ v_3^2 &= \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 \end{aligned} \quad (4.185)$$

Од Слика 4.13 непосредно следува:

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{d}_1 \\ y_1 &= 0 \Rightarrow \dot{y}_1 = 0 \\ x_2 &= d_1 + L_2 \cos \theta_2 = d_1 + L_2 C_2 \Rightarrow \\ \dot{x}_2 &= \dot{d}_1 - L_2 S_2 \dot{\theta}_2 \\ y_2 &= -L_2 \sin \theta_2 = -L_2 S_2 \Rightarrow \\ \dot{y}_2 &= -L_2 C_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4.186)$$

додека x_3 , \dot{x}_3 , y_3 и \dot{y}_3 веќе се пресметани во делот од задачата под а):

$$\begin{aligned} x_3 &= d_1 + L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = d_1 + L_2 C_2 + L_3 C_{23} \Rightarrow \\ \dot{x}_3 &= \dot{d}_1 - L_2 S_2 \dot{\theta}_2 - L_3 S_{23} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ y_3 &= -L_2 \sin \theta_2 - L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) = -L_2 S_2 - L_3 S_{23} \Rightarrow \\ \dot{y}_3 &= -L_2 C_2 \dot{\theta}_2 - L_3 C_{23} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \end{aligned} \quad (4.187)$$

па за кинетичките енергии на масите m_1 , m_2 и m_3 се добива:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{m_1}{2} \dot{d}_1^2 \\
 K_2 &= \frac{m_2}{2} \left[\dot{d}_1^2 + L_2^2 (C_2^2 + S_2^2) \dot{\theta}_2^2 - 2L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 \right] = \frac{m_2}{2} \left(\dot{d}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - 2L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 \right) \\
 K_3 &= \frac{m_3}{2} \left[L_2^2 C_2^2 \dot{\theta}_2^2 + L_3^2 C_{23}^2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3^2) + 2L_2 L_3 C_2 C_{23} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) \right] + \\
 &+ \frac{m_3}{2} \left[\dot{d}_1^2 + L_2^2 S_2^2 \dot{\theta}_2^2 + L_3^2 S_{23}^2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3^2) - 2L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 - \right. \\
 &\left. - 2L_3 S_{23} \dot{d}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + 2L_2 S_2 L_3 S_{23} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) \right] = \\
 &= \frac{m_3}{2} \dot{d}_1^2 + \frac{m_3}{2} \left[L_2^2 (C_2^2 + S_2^2) + L_3^2 (C_{23}^2 + S_{23}^2) + 2L_2 L_3 (C_2 C_{23} + S_2 S_{23}) \right] \dot{\theta}_2^2 + \\
 &\left[+ \frac{m_3}{2} L_3^2 (C_{23}^2 + S_{23}^2) \dot{\theta}_3^2 + m_3 \left[L_3^2 (C_{23}^2 + S_{23}^2) + L_2 L_3 (C_2 C_{23} + S_2 S_{23}) \right] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \right. \\
 &\left. - m_3 [L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 - L_3 S_{23} \dot{d}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \right] = \\
 &= \frac{m_3}{2} \dot{d}_1^2 + \frac{m_3}{2} (L_2^2 + L_3^2 + 2L_2 L_3 C_3) \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_3}{2} L_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \\
 &- m_3 [L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 - L_3 S_{23} \dot{d}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \tag{4.188}
 \end{aligned}$$

Вкупната кинетичка енергија на набљудуваниот систем е:

$$\begin{aligned}
 K &= K_1 + K_2 + K_3 = \frac{m_1}{2} \dot{d}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{d}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - 2L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 \right) + \frac{m_3}{2} \dot{d}_1^2 + \\
 &+ \frac{m_3}{2} (L_2^2 + L_3^2 + 2L_2 L_3 C_3) \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_3}{2} L_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \\
 &- m_3 [L_2 S_2 \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 + L_3 S_{23} \dot{d}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \tag{4.189}
 \end{aligned}$$

или по средувањето:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2} \dot{d}_1^2 + \\
 &+ \left[\frac{m_2 + m_3}{2} L_2^2 + \frac{m_3}{2} (L_3^2 + 2L_2 L_3 C_3) \right] \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_3}{2} L_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \\
 &- [(m_2 + m_3) L_2 S_2 + m_3 L_3 S_{23}] \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 - m_3 L_3 S_{23} \dot{d}_1 \dot{\theta}_3 \tag{4.190}
 \end{aligned}$$

Потенцијалната енергија на системот може да се претстави како збир од потенцијалните енергии:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad (4.191)$$

каде што:

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = -m_2 g L_2 S_2$$

$$P_3 = -m_3 g L_2 S_2 - m_3 g L_3 S_{23} \quad (4.192)$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$= -m_2 g L_2 S_2 - m_3 g L_2 S_2 - m_3 g L_3 S_{23} = -(m_2 + m_3) g L_2 S_2 - m_3 g L_3 S_{23} \quad (4.193)$$

Лагранжијанот за набљудуваниот систем е даде со изразот:

$$\begin{aligned} L = K - P = & \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2} \dot{d}_1^2 + \\ & + \left[\frac{m_2 + m_3}{2} L_2^2 + \frac{m_3}{2} (L_3^2 + 2L_2 L_3 C_3) \right] \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_3}{2} L_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \\ & - [(m_2 + m_3) L_2 S_2 + m_3 L_3 S_{23}] \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 - m_3 L_3 S_{23} \dot{d}_1 \dot{\theta}_3 + (m_2 + m_3) g L_2 S_2 + m_3 g L_3 S_{23} \quad (4.194) \end{aligned}$$

Равенките на движењето на системот од Слика 4.13 се:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial d_1} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (4.195)$$

каде што:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} = (m_1 + m_2 + m_3) \dot{d}_1 - [(m_2 + m_3) L_2 S_2 + m_3 L_3 S_{23}] \dot{\theta}_2 - m_3 L_3 S_{23} \dot{\theta}_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \left[(m_2 + m_3) L_2^2 + m_3 (L_3^2 + 2L_2 L_3 C_3) \right] \dot{\theta}_2 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \dot{\theta}_3 -$$

$$- [(m_2 + m_3) L_2 S_2 + m_3 L_3 S_{23}] \dot{d}_1$$

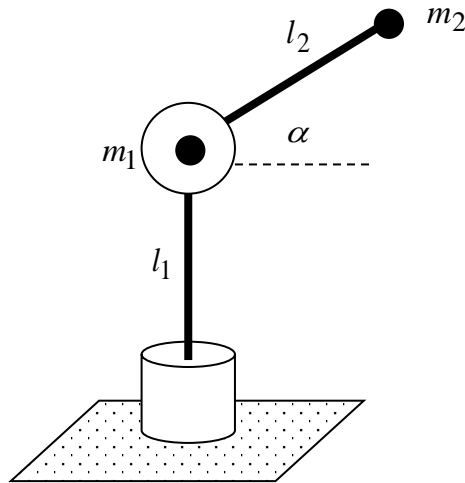
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} &= m_3 L_3^2 \dot{\theta}_3 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \dot{\theta}_2 - m_3 L_3 S_{23} \dot{d}_1 \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} \right) &= (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{d}_1 - [(m_2 + m_3) L_2 S_2 + m_3 L_3 S_{23}] \ddot{\theta}_2 - m_3 L_3 S_{23} \ddot{\theta}_3 + \dots \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= [(m_2 + m_3) L_2^2 + m_3 (L_3^2 + 2L_2 L_3 C_3)] \ddot{\theta}_2 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \ddot{\theta}_3 - \\
 &\quad - [(m_2 + m_3) L_2 S_2 + m_3 L_3 S_{23}] \ddot{d}_1 + \dots \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= m_3 L_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \ddot{\theta}_2 - m_3 L_3 S_{23} \ddot{d}_1 + \dots \\
 \frac{\partial L}{\partial d_1} &= 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -[(m_2 + m_3) L_2 C_2 + m_3 L_3 C_{23}] \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 - m_3 L_3 C_{23} \dot{d}_1 \dot{\theta}_3 + (m_2 + m_3) g L_2 C_2 + m_3 g L_3 C_{23} \\
 \frac{\partial L}{\partial \theta_3} &= -m_3 L_3 C_{23} \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 - m_3 L_3 C_{23} \dot{d}_1 \dot{\theta}_3 + m_3 g L_3 C_{23}
 \end{aligned} \tag{4.196}$$

Бараната матрица на масите \mathbf{M} и гравитациониот вектор \mathbf{G} се дадени со изразите:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \mathbf{M}_3] \\
 \mathbf{M}_1 &= \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 \\ -(m_2 + m_3) L_2 S_2 - m_3 L_3 S_{23} \\ -m_3 L_3 S_{23} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M}_2 &= \begin{bmatrix} -(m_2 + m_3) L_2 S_2 - m_3 L_3 S_{23} \\ (m_2 + m_3) L_2^2 + m_3 (L_3^2 + 2L_2 L_3 C_3) \\ m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M}_3 &= \begin{bmatrix} -m_3 L_3 S_{23} \\ m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \\ m_3 L_3^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 0 \\ (m_2 + m_3) g L_2 C_2 + m_3 g L_3 C_{23} \\ m_3 g L_3 C_{23} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.197}$$

4.15. На Слика 4.14 е прикажана роботска рака со два крака l_1 и l_2 и два зглоба θ_1 и θ_2 , кај која вториот зглоб е фиксиран на положбата $\theta_2 = \alpha$ и не може да се движи. Заради поголема едноставност на аналитичките пресметки, да се

претпостави дека масите m_1 и m_2 се концентрирани на краевите од соодветните краци. Бидејќи положбата на вториот крак е фиксирана, раката има само еден степен слобода на движење – ротација околу оската z_0 . Да се состави динамички модел на дадената роботска рака, модел во просторот на состојби и да се определат нејзините рамнотежни состојби.



Слика 4.14. Роботска рака со еден степен слобода на движење

Решение: Единствената променлива на роботската рака е $\theta_1 = \theta$, придружена со подвижниот зглоб на механизмот, па нејзината кинетичката енергија ќе биде:

$$K = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (4.198)$$

при што:

$$J = m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha) \quad (4.199)$$

додека нејзината потенцијална енергија изнесува:

$$P = m_1 l_1 g + m_2 [l_1 + l_2 \sin(\alpha)] g \quad (4.200)$$

каде што g е Земјиното забрзување, а за рамнина на нулта потенцијална енергија е усвоена рамнината (x_0, y_0) . Може да се забележи дека потенцијалната енергија на дадената роботска рака е константна и не зависи од променливата на зглобот θ .

Лагранжијанот на набљудуваната роботска рака е:

$$L = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha) \dot{\theta}^2 - m_1 l_1 g - m_2 [l_1 + l_2 \sin(\alpha)] \quad (4.201)$$

па за да се добие нејзината равенка на движење се пресметува:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha) \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (4.202)$$

Оттука, динамичкиот модел на раката од Слика 4.14 е:

$$m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha) \ddot{\theta} = \tau \quad (4.203)$$

каде што τ е вртливиот момент во зглобот, кој го предизвикува движењето на раката.

Добиениот математички модел е нехомогена линеарна диференцијална равенка од втор ред, која може да се претстави во следниот матричен облик:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{\tau}{m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha)} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \dot{\theta}(0) \end{bmatrix} \quad (4.204)$$

Потребен и доволен услов да постои рамнотежна состојба на раката гласи:

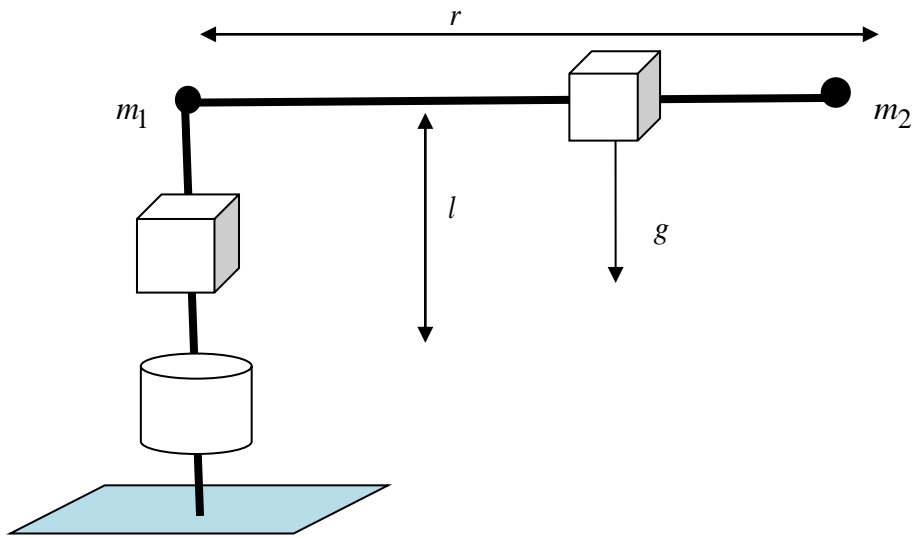
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.205)$$

односно:

$$\frac{\tau}{m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha)} = 0 \Rightarrow \tau = 0, \dot{\theta} = 0 \quad (4.206)$$

и лесно може да се заклучи дека роботската рака има бесконечно многу рамнотежни состојби.

4.16. Да се состави динамичкиот модел на цилиндричната роботска рака од Слика 4.15.



Слика 4.15. Илустрација кон Задача 4.16

Решение: Потенцијалната енергија на раката е:

$$P = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2)gl \quad (4.207)$$

додека нејзината кинетичка енергија изнесува:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{l}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{l}^2 + \dot{r}^2) + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2 \quad (4.208)$$

Оттука, Лагранжијанот на раката ќе биде:

$$L = K - P = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{l}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{l}^2 + \dot{r}^2) + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2 - (m_1 + m_2)gl \quad (4.209)$$

Бидејќи:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} + m_2r^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\ddot{\theta} + m_2r^2\ddot{\theta} + 2m_2r\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} &= (m_1 + m_2)\dot{l} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} \right) &= (m_1 + m_2)\ddot{l} \\ \frac{\partial L}{\partial l} &= -(m_1 + m_2)g \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m_2\dot{r} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= m_2\ddot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_2r\dot{\theta} \end{aligned} \tag{4.210}$$

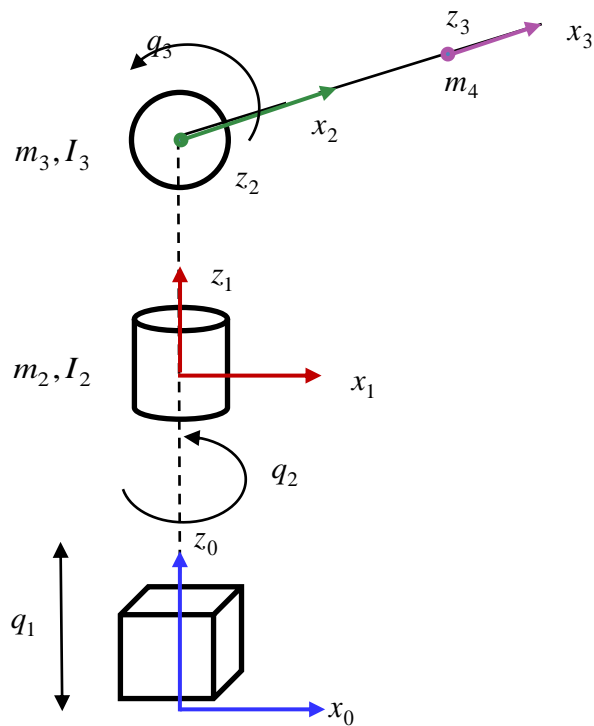
за динамиката на набљудуваната RPP роботска рака се добиваат релациите:

$$(J + m_2r^2)\ddot{\theta} + 2m_2r\dot{r}\dot{\theta} = \tau_1 \tag{4.211}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{l} + (m_1 + m_2)g = f_2 \tag{4.212}$$

$$m_2\ddot{r} - m_2r\dot{\theta}^2 = f_3 \tag{4.213}$$

4.17. Дадена е роботската рака од Слика 4.16.



Слика 4.16. Илустрација кон Задача 4.17

Да се определат матрицата на кинетички енергии $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ и гравитацискиот вектор $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ од моделот на движењето на набљудуваниот робот:

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (4.214)$$

Нека, под претпоставка, $m_1 = 0$ и $I_1 = 0$ за сите зглобови.

Решение: Матрицата на инерции \mathbf{M} се определува по формулата:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{J}_{vi}^T \mathbf{J}_{vi} + \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_{\omega i}^T (I_i) \mathbf{J}_{\omega i} \quad (4.215)$$

каде што \mathbf{J}_{vi} е Јакобијан на линеарната брзина на координатниот систем $\{i\}$, $\mathbf{J}_{\omega i}$ е Јакобијан на агловата брзина на координатниот систем $\{i\}$, m_i е маса на i -тиот зглоб и I_i е момент на инерција на i -тиот зглоб, додека гравитацискиот вектор \mathbf{G} е даден со изразот:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_{vi}^T m_i \mathbf{g} \quad (4.216)$$

каде што:

$$\mathbf{g} = [g_x \quad g_y \quad g_z]^T \quad (4.217)$$

За да се определат Јакобијаните од (4.215), потребни се трансформационите матрици на набљудуваната роботска рака:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_2C_3 & -C_2S_3 & S_2 & 0 \\ S_2C_3 & -S_2S_3 & -C_2 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} C_2C_3 & -C_2S_3 & S_2 & L_3C_2C_3 \\ S_2C_3 & -S_2S_3 & -C_2 & L_3S_2C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3S_3q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.218)$$

Следствено:

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -L_3S_2C_3 & -L_3C_2S_3 \\ 0 & L_3C_2C_3 & -L_3S_2S_3 \\ 1 & 0 & L_3C_3 \end{bmatrix} \quad (4.219)$$

$${}^3\mathbf{J} = ({}^3\mathbf{R}_0) \cdot ({}^0\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} C_2C_3 & S_2C_3 & S_3 \\ -C_2S_3 & -S_2S_3 & C_3 \\ S_2 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot ({}^0\mathbf{J}) =$$

$$= \begin{bmatrix} C_2C_3 & S_2C_3 & S_3 \\ -C_2S_3 & -S_2S_3 & C_3 \\ S_2 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -L_3S_2C_3 & -L_3C_2S_3 \\ 0 & L_3C_2C_3 & -L_3S_2S_3 \\ 1 & 0 & L_3C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_3 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & L_3 \\ 0 & -L_3C_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

Јакобијаните \mathbf{J}_{v2} и \mathbf{J}_{v3} :

$$\begin{bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dz_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_{v2}] \cdot \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} \quad (4.221)$$

$$\begin{bmatrix} dx_3 \\ dy_3 \\ dz_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_{v3}] \cdot \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} \quad (4.222)$$

се определуваат едноставно ако се уочи дека координатните системи $\{2\}$ и $\{3\}$ ја менуваат позицијата само како резултат од дејствувањето на призматичниот зглоб, па важи:

$$x_2 = x_3 = 0$$

$$y_2 = y_3 = 0$$

$$z_2 = z_3 = d_1 \Rightarrow \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = 1 \quad (4.223)$$

Оттука:

$${}^0\mathbf{J}_{v2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.224)$$

$${}^0\mathbf{J}_{v3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.225)$$

Наместо ${}^0\mathbf{J}_{v4}$ може да се употреби ${}^3\mathbf{J}_{v4}$:

$${}^3\mathbf{J}_{v4} = \begin{bmatrix} S_3 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & L_3 \\ 0 & -L_3C_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.226)$$

па:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_2 + m_3 + m_4 & 0 & m_4L_3C_3 \\ 0 & m_4L_3^2C_3^2 & 0 \\ m_4L_3C_3 & 0 & m_4L_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.227)$$

$$\mathbf{G} = -m_2({}^0\mathbf{J}_{v2})^T \mathbf{g} - m_3({}^0\mathbf{J}_{v3})^T \mathbf{g} - m_4({}^0\mathbf{J}_{v4})^T \mathbf{g} = \quad (4.228)$$

$$= \begin{bmatrix} m_2g + m_3g + m_4g \\ 0 \\ m_4L_3C_3g \end{bmatrix} \quad (4.229)$$

4.18. Дадена е подвижната роботска рака од типот RRRR, која е опишана со следната трансформациска матрица:

$${}^0\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} c_{12}c_{34} - \frac{1}{\sqrt{2}}s_{12}s_{34} & -c_{12}s_{34} - \frac{1}{\sqrt{2}}s_{12}c_{34} & \frac{1}{\sqrt{2}}s_{12} & \sqrt{2}c_{12}c_3 - s_{12}(s_3 - 1) + c_1 \\ s_{12}c_{34} + \frac{1}{\sqrt{2}}c_{12}s_{34} & -s_{12}s_{34} + \frac{1}{\sqrt{2}}c_{12}c_{34} & \frac{1}{\sqrt{2}}c_{12} & \sqrt{2}s_{12}c_3 + c_{12}(s_3 - 1) + s_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}s_{34} & \frac{1}{\sqrt{2}}c_{34} & \frac{1}{\sqrt{2}} & s_3 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.230)$$

и Јакобијанот:

$${}^0\mathbf{J}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (4.231)$$

која ја одредува врската помеѓу ротационата брзина на извршниот елемент и брзините на зглобовите на дадената роботска рака.

а) Да се определи Јакобијанот која ја дефинира врската помеѓу линеарната брзина на извршниот елемент од раката и брзината на зглобовите на раката за

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T = [0 \ 90^0 \ -90^0 \ 0]^T \quad (4.232)$$

б) Да се определи општиот Јакобијан за дадената роботска рака во однос на референтниот координатен систем, која ја дефинира врската помеѓу линеарната и ротационата брзина на извршниот елемент од раката и брзината на зглобовите на раката за дадените вредности на променливите на зглобовите под а).

в) Да се определат торзионите моменти на зглобовите на роботската рака, ако врз координатниот почеток од координатниот систем $\{4\}$, придружен со завршниот елемент од раката, дејствува следниот вектор на сили: ${}^4F = [0 \ 6 \ 0 \ 7 \ 0 \ 8]^T$. (Упатство: Бараното решение да се определи квалитативно, но не и квантитативно.)

Решение: а) Бараниот Јакобијан е одреден со изразот:

$${}^0\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta_2} \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta_3} \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta_4} \right] = \quad (4.233)$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{2}s_{12}c_3 - c_{12}(s_3 - 1) - s_1 & -\sqrt{2}s_{12}c_3 - c_{12}(s_3 - 1) & -\sqrt{2}c_{12}s_3 - s_{12}c_3 & 0 \\ \sqrt{2}c_{12}c_3 - s_{12}(s_3 - 1) + c_1 & \sqrt{2}c_{12}c_3 - s_{12}(s_3 - 1) & -\sqrt{2}s_{12}s_3 + c_{12}c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.234)$$

каде што \mathbf{P} е векторот $\mathbf{P} = [x \ y \ z]^T$. За конкретните вредности $[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T = [0 \ 90^0 \ -90^0 \ 0]^T$ тој изнесува:

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.235)$$

б) Бараниот Јакобијан е даден со изразот $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J} \\ {}^0\mathbf{J}_\omega \end{bmatrix}$ и тој е:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (4.236)$$

в) Општиот израз за пресметување на торзионите моменти \mathbf{T} во зглобовите на дадена роботска рака под дејство на надворешни сили \mathbf{F} е:

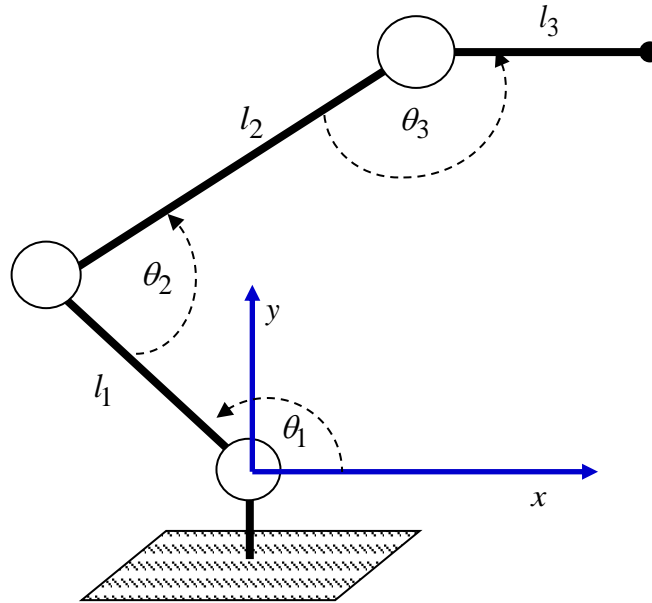
$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^T \times \mathbf{F} \quad (4.237)$$

Во конкретниот пример, познат е векторот на силите ${}^4\mathbf{F}_4 = -{}^4\mathbf{F}$ (следува непосредно од Њутоновиот закон за акција и реакција) и Јакобиевата матрица \mathbf{J} во однос на референтниот координатен систем, која е пресметана во делот од задачата под б). Меѓутоа, за да можат да се помножат, \mathbf{J} и \mathbf{F} треба да бидат одредени во однос на ист координатен систем, што значи дека или \mathbf{F} треба да се трансформира од координатниот систем $\{4\}$ во координатниот систем $\{0\}$, или \mathbf{J} треба да се трансформира од координатниот систем $\{0\}$ во координатниот систем $\{4\}$. И во двата случаи се добива исто решение:

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{J}^T \cdot ({}^0\mathbf{F}_4) = \mathbf{J}^T \cdot \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_4 & 0 \\ 0 & {}^0\mathbf{R}_4 \end{bmatrix} \cdot ({}^4\mathbf{F}_4) \quad (4.238)$$

4.19. Дадена е рамнинската роботска рака со три степени слобода на движење од Слика 4.17. Нека θ_1 и $l_1 = 3m$ се аголот на завртување на првиот зглоб и должината на првиот крак, θ_2 и $l_2 = 2m$ се аголот на завртување на вториот зглоб и должината на вториот крак, θ_3 и $l_3 = 1m$ се аголот на завртување на третиот зглоб и должината на третиот крак. а) За $\theta_1 = 135^0$, $\theta_2 = 45^0$ и $\theta_3 = 225^0$, да се определи Јакобијанот на оваа рака со димензија 2×3 , која ја дефинира

врската помеѓу позицијата на роботската рака и придвижувањето на зглобовите. б) Да се определат соодветните торзиони моменти во зглобовите од набљудуваната роботска рака потребни да се генерира сила од $F_x = 10N$ и $F_y = -2N$ на крајот од раката.



Слика 4.17. Илустрација кон Задача 4.19

Решение:

$$x = l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} \quad (4.239)$$

$$y = l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} \quad (4.240)$$

$$\dot{x} = -l_1 S_1 \dot{\theta}_1 - l_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - l_3 S_{123} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \quad (4.241)$$

$$\dot{y} = l_1 C_1 \dot{\theta}_1 + l_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_3 C_{123} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \quad (4.242)$$

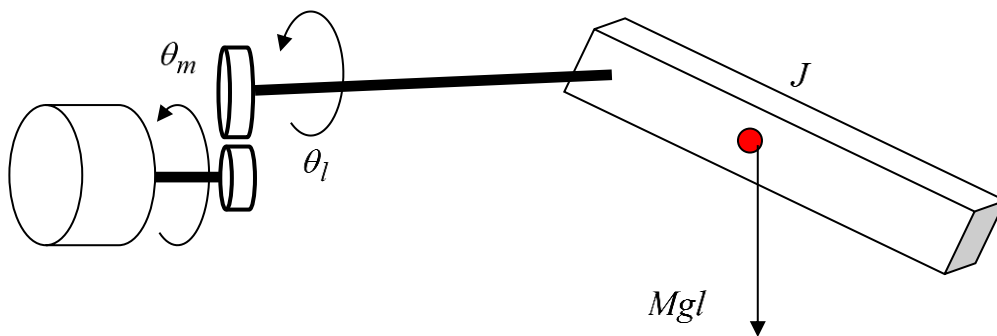
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_3 S_{123} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_3 C_{123} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.243)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_3 S_{123} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_3 C_{123} \end{bmatrix} = \quad (4.244)$$

$$= \begin{bmatrix} -2.8284 & -0.7071 & -0.7071 \\ -3.1442 & -1.2929 & 0.7071 \end{bmatrix} \quad (4.245)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -21.4558 \\ -4.4853 \\ -8.4853 \end{bmatrix} \quad (4.246)$$

4.20. Дадена е роботската рака од Слика 4.18, која има само еден крак, прицврстен за оската на еднонасочен мотор преку редуктор со редукиционен однос $r : 1$. Редукторот ја намалува (редуцира) брзината на вртење на моторот, а го зголемува неговиот вртлив момент. Нека, под претпоставка, θ_l е аголот на вртење на кракот од роботската рака, а θ_m - аголот на вртење на оската од моторот. Да се определи равенката на движење на овој систем.



Слика 4.18. Илустрација кон Задача 4.20

Решение: Заради присуството на редукторот, брзината на кракот θ_l ќе биде помала од брзината на моторот θ_m за вредноста на r :

$$\theta_m = r\theta_l \quad (4.247)$$

Бидејќи набљудуваниот систем од Слика 4.18 има само еден степен слобода на движење, како генерализирана координата на движењето може да се усвои било θ_m било θ_l . Од аспект на θ_l , кинетичката енергија на системот од сликата е дадена со изразот:

$$K = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} J_l \dot{\theta}_l^2 = \frac{1}{2} (r^2 J_m + J_l) \dot{\theta}_l^2 \quad (4.248)$$

каде што J_m и J_l се ротациските инерции (инерциските моменти) на моторот и кракот од роботската рака, соодветно, додека неговата потенцијална енергија е:

$$P = Mgl(1 - \cos \theta_l) \quad (4.249)$$

каде што M е вкупната маса на кракот, а l е растојанието од оската на моторот до тежиштето на кракот.

Следствено, Лагранжијанот на набљудуваниот систем е:

$$L = K - P = \frac{1}{2}(r^2 J_m + J_l) \dot{\theta}_l^2 - Mgl(1 - \cos \theta_l) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_l^2 - Mgl(1 - \cos \theta_l) \quad (4.250)$$

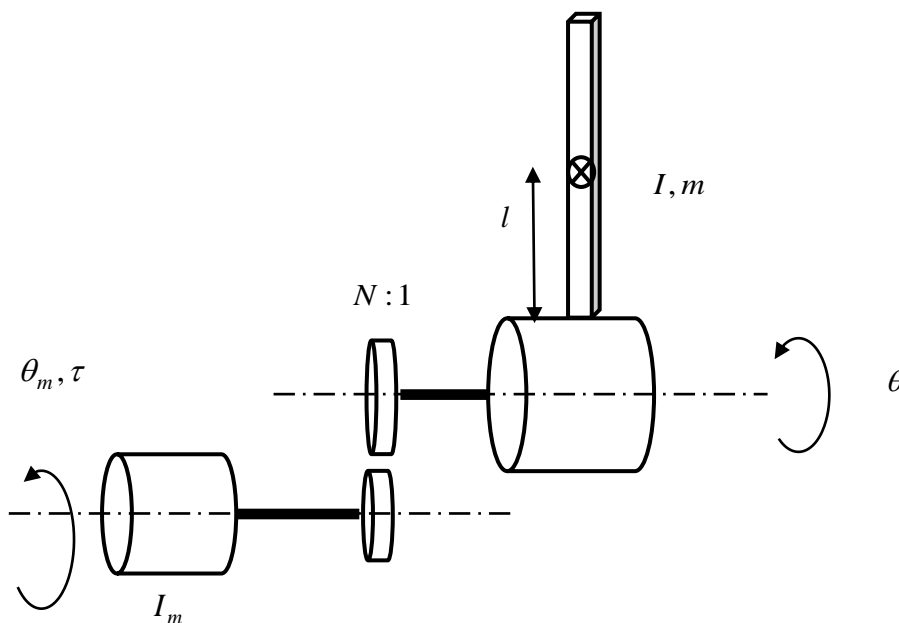
па, за бараната равенка на движење се добива:

$$T_l = J \ddot{\theta}_l + Mgl \sin \theta_l \quad (4.251)$$

каде што T_l е генерализираниот вртлив (ротационен) момент кој дејствува врз кракот од роботската рака. Во стварност, T_l се состои од вртливиот момент на моторот во однос на кракот $\tau = r\tau_m$ и отпорните моменти на моторот $B_m \dot{\theta}_m$ и кракот $B_l \dot{\theta}_l$:

$$\begin{aligned} T_l &= r\tau_m - B_m \dot{\theta}_m - B_l \dot{\theta}_l = r\tau_m - B_m r \dot{\theta}_l - B_l \dot{\theta}_l = \\ &= r\tau_m - (rB_m + B_l) \dot{\theta}_l = r\tau_m - B \dot{\theta}_l \end{aligned} \quad (4.252)$$

4.21. Даден е роботскиот механизам од Слика 4.19. Тој се состои од крут крак со маса m и момент на инерција I во однос на оската што минува низ неговото тежиште. Тежиштето на кракот се наоѓа на растојание l од неговата оска на ротација. Моментот на инерција на моторот, кој го задвижува кракот, е I_m .



Слика 4.19. Роботска рака сочинета од крут крак со крут зглоб

Да се состави динамички модел на зададениот роботски механизам под претпоставка на крут зглоб и под претпоставка на еластичен зглоб. За оска на нулева потенцијална енергија да се усвои вертикалната оска.

Решение: Кинетичката енергија на набљудуваниот механизам е:

$$K = \frac{1}{2}(ml^2 + I)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m N^2 \dot{\theta}^2 \quad (4.253)$$

додека неговата потенцијална енергија изнесува:

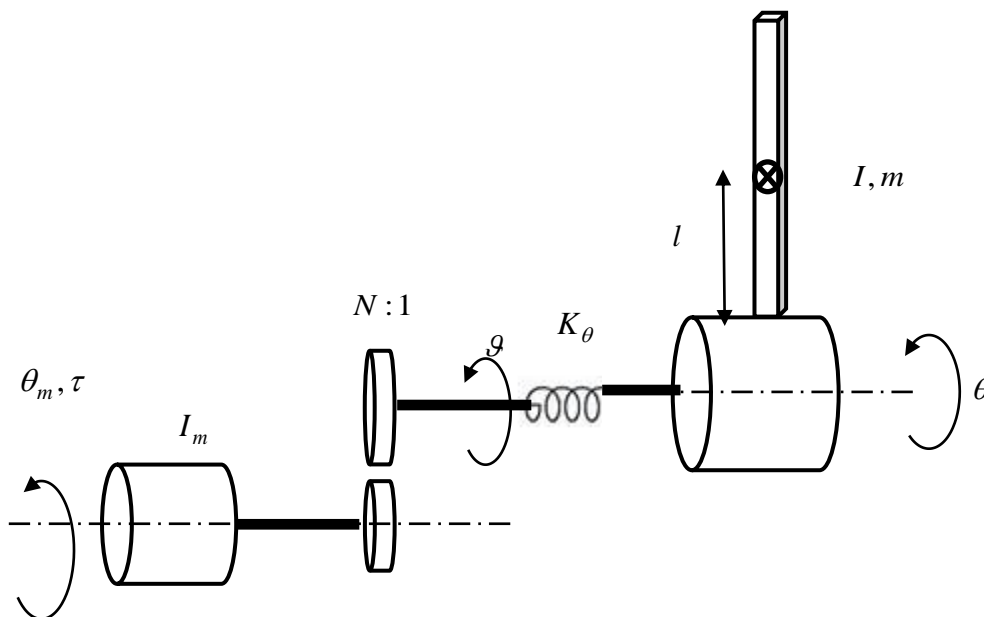
$$P = mgl[1 - \cos(\theta)] \quad (4.254)$$

Оттука, динамичкиот модел на набљудуваниот роботски механизам од Слика 4.19, под претпоставка на крут зглоб е:

$$(ml^2 + I + I_m N^2)\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = \tau \quad (4.255)$$

Ако се претпостави дека набљудуваниот роботски механизам има еластичен зглоб, при составувањето на неговиот динамички модел треба да се земе во предвид и торзионата еластична константа на зглобот, затоа што еластичните зглобови по правило се еквивалентираат со ротациони пружини. Тогаш зададениот роботски механизам може да се претстави како на Слика 4.20, па неговата кинетичка енергија ќе изнесува:

$$K = \frac{1}{2}(ml^2 + I)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m N^2 \dot{\theta}^2 \quad (4.256)$$



Слика 4.20. Роботска рака сочинета од крут крак со еластичен зглоб

Потенцијалната енергија на роботскиот механизам од Слика 4.20 има две компоненти – гравитациона и еластична:

$$P = mgl[1 - \cos(\theta)] + \frac{1}{2} K_{\theta} (\theta - \vartheta)^2 \quad (4.257)$$

Оттука, неговиот динамички модел ќе гласи:

$$\begin{aligned} (ml^2 + I)\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) + K_{\theta}(\theta - \vartheta) &= 0 \\ I_m N^2 \ddot{\vartheta} - K_{\theta}(\theta - \vartheta) &= \tau \end{aligned} \quad (4.258)$$

Како што може да се забележи, роботскиот механизам од Слика 4.19 има само еден степен слобода на движење, додека роботскиот механизам од Слика 4.20 има два степени слобода на движење. Тоа значи дека роботска рака со n крути зглобови има n степени слобода, додека роботска рака со n еластични зглобови има $2n$ степени слобода на движење.

4.22. Динамичкиот модел на роботска рака со крути зглобови и краци има општ облик:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.259)$$

Дали и како може истиот да се трансформира во просторот на извршниот елемент на роботската рака (тоа е просторот во кој е опишана положбата на раката)?

Решение: Врската помеѓу брзината на една роботска рака и брзината на нејзините зглобови е дадена со релацијата:

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.260)$$

каде што $\dot{\mathbf{D}}$ е векторот на брзината на роботската рака:

$$\dot{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T & \boldsymbol{\omega}^T \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^6 \quad (4.261)$$

$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T$ е векторот на брзината на зглобовите на роботската рака и $[\mathbf{J}]_{6 \times 2}$ е Јакобијанот на роботската рака. Слично, врската помеѓу силите и моментите што дејствуваат во зглобовите на роботската рака и силите и моментите што дејствуваат врз раката е дадена со релацијата:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (4.262)$$

каде што \mathbf{F} е векторот на силите и моментите во Декартови координати.

Со диференцирање на равенката за брзините се добива:

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.263)$$

од каде што следува:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{D}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.264)$$

Со воведување на изразите за $\dot{\mathbf{q}}$ и $\ddot{\mathbf{q}}$ во динамичкиот модел на роботската рака се добива:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})(\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{D}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \\ = \mathbf{M}(\mathbf{q})(\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{D}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{D}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (4.265)$$

$$\mathbf{J}^{-T} \mathbf{M}(\mathbf{q})(\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{D}} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{D}}) + \mathbf{J}^{-T} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J}^{-T} \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{F} \quad (4.266)$$

$$\mathbf{J}^{-T} \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J}^{-T} [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1} - \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}] \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J}^{-T} \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{F} \quad (4.267)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \mathbf{F} \quad (4.268)$$

4.23. Роботска рака со 6 степени слобода на движење има задача да избуши отвор во дадена плоча. За таа цел, на крајот од роботската рака треба да се произведе сила од $5N$ во правец на z -оската и вртлив момент од $20Nm$ во однос на истата оска. Да се пресметаат потребните сили и моменти што треба да се генерираат во зглобовите од раката за да се постигне саканата цел, ако е даден Јакобијанот на роботската рака ${}^T_6\mathbf{J}$ во однос на координатниот систем придружен со крајот од раката:

$${}^T_6\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.269)$$

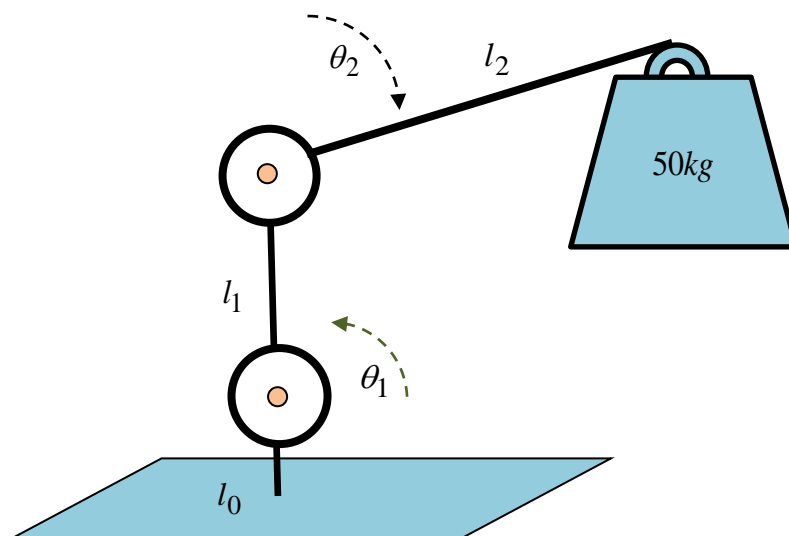
Решение:

$$[\mathbf{T}] = [{}^T_6\mathbf{J}]^T \cdot [{}^T_6\mathbf{F}] = \quad (4.270)$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix} \quad (4.271)$$

Решението (4.271) важи за одредена конфигурација на набљудуваната роботска рака. Со промената на нејзината конфигурација, се менува и вредноста на Јакобијанот $\mathbf{T}_6 \mathbf{J}$, што значи дека со движењето на роботската рака силите и моментите во нејзините зглобови мора постојано да се пресметуваат.

4.24. На Слика 4.21 е прикажана RR роботска рака со 2 степени слобода. Да се определат вртливите моменти кои треба да дејствуваат во зглобовите од раката, за раката да може да го држи тегот од 50kg прикачен на нејзиниот крај. Под претпоставка, аглова положба на првиот зглоб е $\theta_1 = 90^\circ$, аглова положба на вториот зглоб е $\theta_2 = -45^\circ$, растојание на првиот зглоб од основата е $l_0 = 0$, должина на првиот крак е $l_1 = 0.3\text{m}$, должина на вториот крак е $l_2 = 0.5\text{m}$, земјино забрзување (дејствува вертикално надолу) е $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ и силата на земјината тежа (дејствува верикално надолу) е $F_g = mg$.



Слика 4.21. Илустрација кон Задача 4.24

Решение: Јакобијанот на набљудуваната роботска рака за дадените вредности на нејзините променливи $\theta_1 = 90^0$ и $\theta_2 = -45^0$ е:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.65 & -0.35 \\ 0.35 & 0.35 \end{bmatrix} \quad (4.272)$$

Надворешните сили кои дејствуваат врз раката се:

$$\mathbf{F}_{nadvoresna} = \begin{bmatrix} 0 \\ -500N \end{bmatrix} \quad (4.273)$$

и тие мора да биде урамнотежени со следните сили во зглобовите:

$$\mathbf{F}_{zglobovite} = \begin{bmatrix} 0 \\ 500N \end{bmatrix} \quad (4.274)$$

Оттука, вртливите моменти што треба да дејствуваат врз зглобовите од раката, за таа да може да го држи тегот прикачен на нејзиниот крај се преставени со следниот вектор:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{zglobovite} = \begin{bmatrix} -0.65m & -0.35m \\ 0.35m & 0.35m \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 500N \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.65m & 0.35m \\ -0.35m & 0.35m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 500N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175Nm \\ 175Nm \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.275)$$

4.25. На крајот од дадена роботска рака, кон кој е придружен координатниот систем \mathbf{H} , дејствуваат следните сили и моменти дефинирани во однос на референтниот координатен систем \mathbf{U} :

$$\mathbf{U}\mathbf{F} = [0 \ 45 \ 0 \ 0 \ 0 \ 35]^T \quad (4.276)$$

Да се најдат еквивалентните сили и моменти кои дејствуваат врз раката во однос на координатниот систем \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.277)$$

Решение:

$$\mathbf{f} = [F_x \ F_y \ F_z]^T = [0 \ 45 \ 0]^T$$

$$\mathbf{m} = [M_x \ M_y \ M_z]^T = [0 \ 0 \ 35]^T$$

$$\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z]^T = [2 \ 4 \ 7]^T$$

$$\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\mathbf{o} = [o_x \ o_y \ o_z]^T = [1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T = [0 \ 1 \ 0]^T$$

$$\mathbf{H}_{F_x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = n_x F_x + n_y F_y + n_z F_z = 0$$

$$\mathbf{H}_{F_y} = \mathbf{o} \cdot \mathbf{f} = o_x F_x + o_y F_y + o_z F_z = 0$$

$$\mathbf{H}_{F_z} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} = a_x F_x + a_y F_y + a_z F_z = 45$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 45 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 315\mathbf{i} - 90\mathbf{k}$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{P} + \mathbf{m} = 315\mathbf{i} - 90\mathbf{k} + 35\mathbf{k} = 315\mathbf{i} - 55\mathbf{k}$$

$$\mathbf{H}_{M_x} = \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{P}) + \mathbf{m}] = -55$$

$$\mathbf{H}_{M_y} = \mathbf{o} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{P}) + \mathbf{m}] = 315$$

$$\mathbf{H}_{M_z} = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{P}) + \mathbf{m}] = 0 \tag{4.278}$$

Еквивалентните сили и моменти што дејствуваат врз раката во однос на координатниот систем \mathbf{H} се претставени со векторот:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{F}} &= [\mathbf{H}_{F_x} \ \mathbf{H}_{F_y} \ \mathbf{H}_{F_z} \ \mathbf{H}_{M_x} \ \mathbf{H}_{M_y} \ \mathbf{H}_{M_z}]^T = \\ &= [0 \ 0 \ 45 \ -55 \ 315 \ 0]^T \end{aligned} \tag{4.279}$$

4.26. Врз крајниот зглоб од една роботска рака дејствуваат следните сили и моменти, дефинирани во однос на референтниот координатен систем \mathbf{U} :

$$\mathbf{U}_{\mathbf{F}} = [10 \ 0 \ 5 \ 15 \ 20 \ 0]^T \tag{4.280}$$

Со крајниот зглоб од роботската рака е придружен координатниот систем \mathbf{H} . Да се најдат еквивалентните сили и моменти кои дејствуваат врз крајниот зглоб од раката во однос на подвижниот координатен систем \mathbf{H} ако:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0.7071 & -0.7071 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.281)$$

Решение:

$$\mathbf{f} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T = [10 \quad 0 \quad 5]^T$$

$$\mathbf{m} = [M_x \quad M_y \quad M_z]^T = [15 \quad 20 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{P} = [P_x \quad P_y \quad P_z]^T = [2 \quad 1 \quad 5]^T$$

$$\mathbf{n} = [n_x \quad n_y \quad n_z]^T = [0.7071 \quad 0 \quad 0.7071]^T$$

$$\mathbf{o} = [o_x \quad o_y \quad o_z]^T = [0.7071 \quad 0 \quad -0.7071]^T$$

$$\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T = [0 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{H}_{F_x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = n_x F_x + n_y F_y + n_z F_z = 10.6065$$

$$\mathbf{H}_{F_y} = \mathbf{o} \cdot \mathbf{f} = o_x F_x + o_y F_y + o_z F_z = 3.5355$$

$$\mathbf{H}_{F_z} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} = a_x F_x + a_y F_y + a_z F_z = 0$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 45 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{P} + \mathbf{m} = 10\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

$$\mathbf{H}_{M_x} = \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{P}) + \mathbf{m}] = 14.142$$

$$\mathbf{H}_{M_y} = \mathbf{o} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{P}) + \mathbf{m}] = 0$$

$$\mathbf{H}_{M_z} = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{P}) + \mathbf{m}] = -20 \quad (4.282)$$

Еквивалентните сили и моменти што дејствуваат врз раката во однос на координатниот систем \mathbf{H} се претставени со векторот:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{F}} &= [\mathbf{H}_{F_x} \quad \mathbf{H}_{F_y} \quad \mathbf{H}_{F_z} \quad \mathbf{H}_{M_x} \quad \mathbf{H}_{M_y} \quad \mathbf{H}_{M_z}]^T = \\ &= [10.6065 \quad 3.5355 \quad 0 \quad 14.142 \quad 0 \quad -20]^T \end{aligned} \quad (4.283)$$

4.27. Роботска рака работи на линија за составување делови. За да се состават два дела, раката треба да го бутне едниот дел кон другиот со сила од $20N$ во

правец на x -оската, $10N$ во правец на y -оската, и да го заврти со момент од $100Nm$ во однос на x -оската. Положбата на предметот во однос на основата од роботот е дадена со трансформациската матрица:

$$\mathbf{B}_{\text{Тобјект}} = \begin{bmatrix} 0 & -0.707 & 0.707 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.284)$$

Под претпоставка дека двата дела мора да се поклопат, да се најдат потребните сили и моменти кои роботската рака мора да ги примени врз делот во однос на локалниот координатен систем придружен кон објектот.

Решение:

$$\mathbf{f} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T = [20 \quad 10 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{m} = [M_x \quad M_y \quad M_z]^T = [100 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{P} = [P_x \quad P_y \quad P_z]^T = [4 \quad 10 \quad 5]^T$$

$$\mathbf{n} = [n_x \quad n_y \quad n_z]^T = [0 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{o} = [o_x \quad o_y \quad o_z]^T = [-0.7071 \quad 0 \quad 0.7071]^T$$

$$\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T = [0.7071 \quad 0 \quad 0.7071]^T$$

$$\mathbf{T}_{\text{објект}} F_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = n_x F_x + n_y F_y + n_z F_z = 10$$

$$\mathbf{T}_{\text{објект}} F_y = \mathbf{o} \cdot \mathbf{f} = o_x F_x + o_y F_y + o_z F_z = -14.142$$

$$\mathbf{T}_{\text{објект}} F_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} = a_x F_x + a_y F_y + a_z F_z = 14.142$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 45 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 50\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 160\mathbf{k}$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{P} + \mathbf{m} = 150\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 160\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{\text{објект}} M_x = \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{P}) + \mathbf{m}] = -100$$

$$\mathbf{T}_{\text{објект}} M_y = \mathbf{o} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{P}) + \mathbf{m}] = 7.071$$

$$\mathbf{T}_{\text{објект}} M_z = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{f} \times \mathbf{P}) + \mathbf{m}] = 219.201 \quad (4.285)$$

Еквивалентните сили и моменти што дејствуваат врз раката во однос на координатниот систем \mathbf{H} се претставени со векторот:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{objekt}} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{F_x} & \mathbf{H}_{F_y} & \mathbf{H}_{F_z} & \mathbf{H}_{M_x} & \mathbf{H}_{M_y} & \mathbf{H}_{M_z} \end{bmatrix} \Gamma = \\ &= [10 \quad -14.142 \quad 14.142 \quad -100 \quad 7.071 \quad 219.201] \Gamma = \end{aligned} \quad (4.286)$$

4.28. Дадена е просторната RRP роботска рака од Слика 4.22. Положбата на извршниот елемент на раката е определена со векторот:

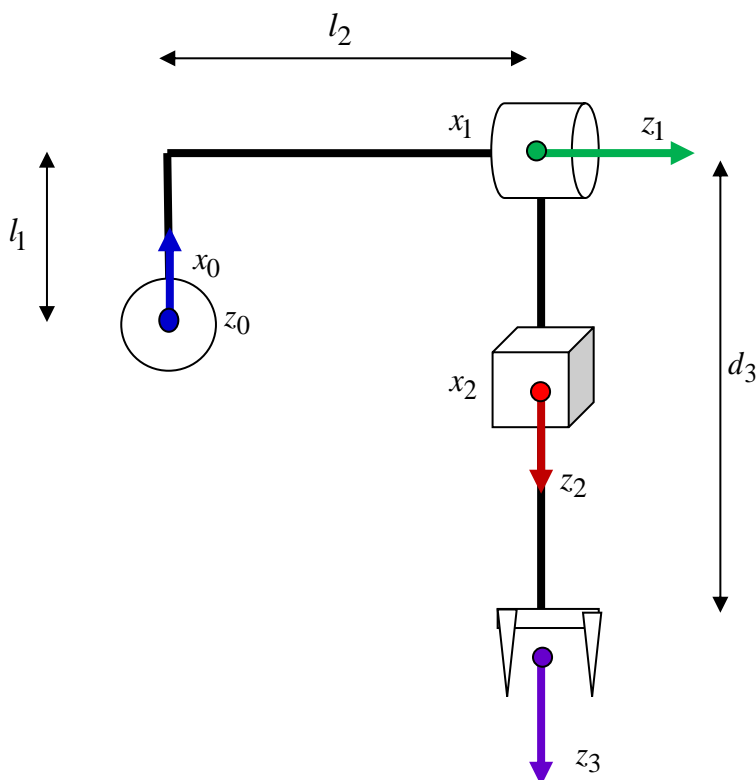
$${}^0 \mathbf{P}_E = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 S_1 - d_3 C_1 S_2 \\ l_1 S_1 - l_2 C_1 - d_3 S_1 S_2 \\ d_3 C_2 \end{bmatrix} \quad (4.287)$$

(а) Да се најде Јакобијанот на овој манипулатор ${}^0 \mathbf{J}$.

(б) Да се пресметаат вртливите моменти и сили во зглобовите од дадената роботска рака за следната конфигурација:

$$\theta_1 = 90^\circ, \theta_2 = 30^\circ, d_3 = 2l_1 \quad (4.288)$$

ако на крајот од раката дејствува сила ${}^3 \mathbf{F}_3 = [1 \quad 0 \quad 0] \Gamma$.



Слика 4.22. Илустрација кон Задача 4.28

Решение: а)

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 + l_2 C_1 + d_3 S_1 S_2 & -d_3 C_1 C_2 & -C_1 S_2 \\ l_1 C_1 + l_2 S_1 - d_3 C_1 S_2 & -d_3 S_1 C_2 & -S_1 S_2 \\ 0 & -d_3 S_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad (4.289)$$

б)

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_2 & -l_1 \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -l_1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.290)$$

$$\mathbf{T} = ({}^0\mathbf{J})^T \cdot ({}^0\mathbf{F}_3) = ({}^0\mathbf{J})^T \cdot ({}^0\mathbf{R}_3) \cdot ({}^3\mathbf{F}_3) \quad (4.291)$$

D-H параметри на роботската рака од Слика 4.23

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	90^0
2	θ_2	l_2	0	-90^0
3	0	d_3	0	0^0

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & l_1 C_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 & l_1 S_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & l_1C_1 + l_2S_1 - d_3C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & l_1S_1 - l_2C_1 - d_3S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & d_3C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

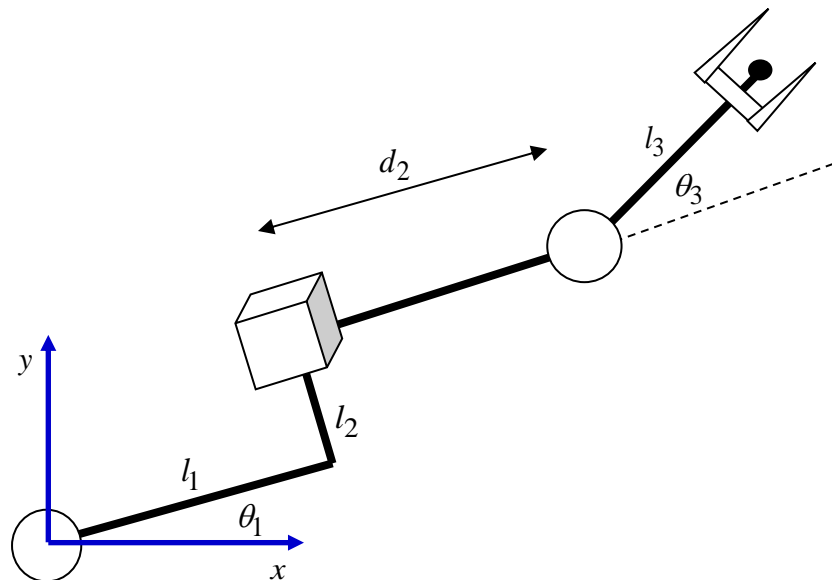
$${}^0\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = ({}^0\mathbf{J})^T \cdot ({}^0\mathbf{F}_3) = ({}^0\mathbf{J})^T \cdot ({}^0\mathbf{R}_3) \cdot ({}^3\mathbf{F}_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & l_2 & 0 \\ 0 & -l_1\sqrt{3} & -l_1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -2l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.292)$$

4.29. Дадена е роботската рака од Слика 4.23. Должините на краците се:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.293)$$



Слика 4.23. Илустрација кон Задачата 4.29

Нека е зададена следната конфигурација на раката:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ d_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{6} \\ 2 \\ \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \quad (4.294)$$

Потребно е раката да дејствува со сила од $20N$ во правец на x -оската, со сила од $10N$ во правец на y -оската и со вртлив момент $5Nm$ во правец на z -оската. Колкави сили и вртливи моменти се потребни да дејствуваат врз зглобовите од раката за да се оствари оваа цел.

Решение: Од геометријата на проблемот следува дека координатите на крајот од роботската рака се:

$$x = l_1 C_1 + d_2 C_1 - l_2 S_1 + l_3 C_{13} = C_1 + d_2 C_1 - 0.5 S_1 + C_{13} \quad (4.295)$$

$$y = l_1 S_1 + d_2 S_1 + l_2 C_1 + l_3 S_{13} = S_1 + d_2 S_1 + 0.5 C_1 + S_{13} \quad (4.296)$$

$$\varphi = \theta_1 + \theta_3 \quad (4.297)$$

па, со нивно диференцирање, се добива Јакобијанот на набљудуваната роботска рака во однос на референтниот координатен систем:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -S_1 - d_2 S_1 - 0.5 C_1 - S_{13} & C_1 & -S_{13} \\ C_1 + d_2 C_1 - 0.5 S_1 + C_{13} & S_1 & C_{13} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.298)$$

Оттука, за дадената конфигурација на раката:

$$\mathbf{T} = ({}^0\mathbf{J})^T \cdot ({}^0\mathbf{F}_3) = \quad (4.299)$$

$$= \begin{bmatrix} -2.8989 & 0.8660 & -0.9659 \\ 2.6069 & 0.5000 & 0.2588 \\ 1.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26.9098 \\ 22.3205 \\ -11.7303 \end{bmatrix} \quad (4.300)$$

5. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИИ НА РОБОТСКА РАКА

Патот на движење на еден робот се дефинира како подредена низа конфигурации на роботот, без оглед на времето поврзано со тие конфигурации. Така, кога еден робот се движи од точката А преку точката В до точката С, патот на движење на роботот го претставува следот конфигурации помеѓу точките А, В и С. **Траекторијата** од друга страна е тесно поврзана со времето во кое треба да се реализираат одредени делови од патот. Оттаму, патот од точката А до точката С преку точката В секогаш е ист, без оглед кога роботот ќе се најде во точките В и С, додека траекторијата на движењето на роботот зависи од брзината и забрзувањето на движењето на роботот. Така, роботот може да се најде во точките В и С во различни временски мигови кои одговараат на различни траектории на неговото движење.

Описот на движењето на роботот преку вредностите на неговите променливи се нарекува опис во **просторот на зглобовите** на роботот. Следствено, просторот на зглобовите на еден робот го сочинуваат сите можни вредности на променливите на зглобовите на роботот.

Општо земено, при планирањето на траекториите и патот на движење на еден робот, за дефинирање на положбата, брзината и забрзувањето на зглобовите на роботот во секоја точка од еден сегмент се користат полиноми од одреден степен. Откако се испланира патот на движењето на роботот, управувачкиот дел од роботот ги користи тие пресметки за да ги пресмета вредностите на променливите на зглобовите на роботот, што ќе овозможат негово соодветно управување и движење.

Почетната положба на роботот (позиција и ориентација), под претпоставка, е позната. Со помош на равенките за инверзна кинематика можат да се определат и вредностите на променливите на зглобовите на роботот кои одговараат на неговата сакана крајна положба. Нека вредноста на променливата на i -тиот зглоб на роботот во времето t_0 е означена со θ_0 , а нејзината вредност во времето t_f е означена со θ_f . Треба да се дефинира движењето на i -тиот зглоб од положбата зададена со θ_0 во положбата одредена со θ_f . Еден начин тоа да се стори е за планирање на траекторијата на движењето на зглобот да се усвои полином од трет степен од општ облик:

$$\theta(t) = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad (5.1)$$

кој ќе ги задоволи дадените почетни услови:

$$\theta(t_0) = \theta_0, \theta(t_f) = \theta_f \quad (5.2)$$

Бидејќи полиномот (5.1) има 4 неопределени параметри, за нивно определување потребни се четири услови. Затоа условите (5.2) се дополнуваат со граничните услови за брзината на движењето на набљудуваниот зглоб во почетниот и крајниот миг на набљудување:

$$\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 = 0, \quad \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f = 0 \quad (5.3)$$

Претпоставката дека набљудуваниот зглоб го започнува движењето од мирување и на крајот од тоа движење повторно запира не претставува никакво ограничување. Подеднакво може да се претпостават и соодветни вредности за почетната и крајната брзина на зглобот различни од нулата.

Со диференцирање на изразот (5.1) и воведување на граничните услови (5.2) – (5.3) се добиваат релациите:

$$\begin{aligned} \theta(t_0) &= c_0 = \theta_0 \\ \theta(t_f) &= c_3 t_f^3 + c_2 t_f^2 + c_1 t_f + c_0 = \theta_f \\ \dot{\theta}(t_0) &= 3c_3 t_0^2 + 2c_2 t_0 + c_1 = c_1 = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= 3c_3 t_f^2 + 2c_2 t_f + c_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

чии решенија се вредностите на коефициентите c_0, c_1, c_2, c_3 на полиномот (5.1). Изразот (5.1) овозможува да се определи положбата на набљудуваниот зглоб во произволен временски миг и врз основа на овие вредности управувачкиот дел од роботот го генерира потребниот управувачки закон и дејствија за придвижување на зглобот од една во друга дефинирана положба. Ако зглобот треба да се придвижи така што ќе мине низ повеќе последователни точки, крајните вредности за положбата и брзината на движењето на зглобот од секој еден претходен сегмент на движење се користат како почетни вредности за следниот. Истата постапка се применува са сите зглобови на набљудуваниот робот одделно, но сите се придвижуваат заедно од почетокот до крајот на планираното движење. Иако положбата и брзината на движење на зглобовите се континуални, забрзувањето не мора да биде таква величина, што може да претставува проблем.

Исто како што се задава брзината на движењето на еден робот во крајните точки од неговата траекторија, така може да се зададе и неговото забрзување. Во тој случај вкупниот број гранични услови е шест, па траекторијата на движењето на роботот може да се претстави со полином од петти степен од општ облик:

$$\theta(t) = c_5 t^5 + c_4 t^4 + c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad (5.5)$$

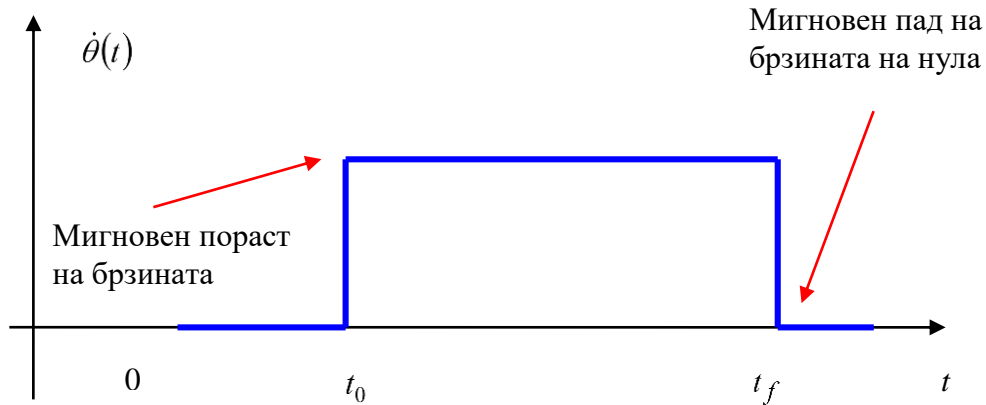
додека неговата брзина и забрзување ќе бидат од облик:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= 5c_5 t^4 + 4c_4 t^3 + 3c_3 t^2 + 2c_2 t + c_1 \\ \ddot{\theta}(t) &= 20c_5 t^3 + 12c_4 t^2 + 6c_3 t + 2c_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

При планирањето на траекторијата на движењето на еден робот може да се претпостави дека роботот се движи со константна брзина, $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta} = \omega = const.$, и нулево забрзување, $\ddot{\theta}(t) = 0$. Тогаш траекторијата на движењето на роботот ќе биде права линија, која може да се опише со полином од прв степен од облик:

$$\theta(t) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 t \quad (5.7)$$

Меѓутоа, ваквото движење на роботот претпоставува мигновена промена на брзината на роботот во граничните точки (на почетокот и крајот од траекторијата на движење), како што се гледа од Слика 5.1, а таа може да се постигне само со бесконечно големо по апсолутна вредност забрзување во истите точки.



Слика 5.1. Константна брзина на движење на еден робот

За да се избегне ваквата ситуација, линеарниот сегмент од траекторијата на краевите се спојува со параболични делови, како што е покажано на Слика 5.2. Овие делови од траекторијата, на интервалот $t_0 \leq t \leq t_b$, односно интервалот $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_A$, се опишани со квадратната функција:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \quad t_0 \leq t \leq t_b \quad (5.8)$$

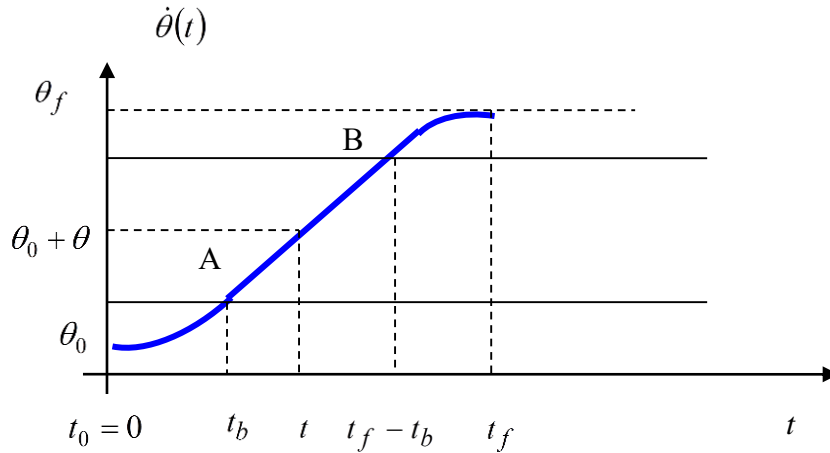
Константите c_0, c_1, c_2 во (5.8) се определуваат од следните услови за почетокот на параболичниот сегмент:

$$\begin{cases} \theta(t_0) = \theta(0) = \theta_0 = c_0 \\ \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = c_1 = 0 \\ \ddot{\theta}(t_0) = \ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}_0 = c_2 \end{cases} \quad (5.9)$$

од каде што следува:

$$\begin{cases} c_0 = \theta_0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \ddot{\theta}_0 \end{cases} \quad (5.10)$$

и условите за крајот од почетниот параболичен сегмент:



Слика 5.2. Спојување на параболични сегменти кон линерниот сегмент од траекторијата на движење на еден робот

$$\begin{cases} \theta(t_b) = \theta_A = \theta_0 + \frac{c_2}{2} t_b^2 \\ \dot{\theta}(t_b) = \dot{\theta}_A = c_2 t_b = \omega \\ \ddot{\theta}(t_b) = \ddot{\theta}_A = \ddot{\theta}_0 = c_2 \end{cases} \quad (5.11)$$

од каде што следува:

$$c_2 = \frac{\omega}{t_b} \quad (5.12)$$

Следствено, положбата, брзината и забрзувањето на роботот на почетниот параболичен дел од неговата траекторија од Слика 5.2 се опишани со релациите:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{\omega}{2t_b} t^2 \quad (5.13)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\omega}{t_b} t \quad (5.14)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{\omega}{t_b} = \text{const.} \quad (5.15)$$

Изразите (5.13) – (5.15) претставуваат движење со константно забрзување. Ова забрзување ја генерира потребната брзина на зглобот од набљудуваниот робот во крајните точки А и В од линерниот сегмент на траекторијата. Брзината на движењето на роботот на линерниот сегмент е, се разбира, константна и се одбира во согласност со физичките можности на актуаторите.

За линерниот сегмент од траекторијата $t_b \leq t \leq t_f - t_b$ односно $\theta_A \leq \theta \leq \theta_B$ на Слика 5.2 важи:

$$\begin{aligned}
 \theta(t) &= \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 t \\
 \dot{\theta}(t) &= \tilde{c}_1 = \omega \\
 \ddot{\theta}(t) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

па граничните услови на почетокот од линеарниот сегмент се:

$$\begin{aligned}
 \theta(t_b) &= \tilde{c}_0 + \omega t_b = \theta_A \\
 \dot{\theta}(t_b) &= \tilde{c}_1 = \omega = \dot{\theta}_A \\
 \ddot{\theta}(t_b) &= 0 = \ddot{\theta}_A
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

додека условите за крајот од линеарниот сегмент гласат:

$$\begin{aligned}
 \theta(t_f - t_b) &= \tilde{c}_0 + \omega(t_f - t_b) = \theta_B \\
 \dot{\theta}(t_f - t_b) &= \omega = \dot{\theta}_B \\
 \ddot{\theta}(t_f - t_b) &= 0 = \ddot{\theta}_B
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Од овде непосредно следува:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_0 &= \theta_A - \omega t_b = \theta_B - \omega(t_f - t_b) \\
 \theta(t) &= \theta_A - \omega t_b + \omega t
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

и:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_A &= \dot{\theta}_B = \omega \\
 \ddot{\theta}_A &= 0 = \ddot{\theta}_B
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

што можеше и да се очекува.

За крајниот параболичен сегмент од траекторијата на Слика 5.2 важи:

$$\begin{aligned}
 \theta(t) &= \frac{1}{2} \bar{c}_2 t^2 + \bar{c}_1 t + \bar{c}_0, \quad t_f - t_b \leq t \leq t_f, \quad \theta_B \leq \theta \leq \theta_f \\
 \dot{\theta}(t) &= \bar{c}_2 t + \bar{c}_1 \\
 \ddot{\theta}(t) &= \bar{c}_2 = \text{const.}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

а соодветните гранични услови за почетокот од крајниот параболичен сегмент се:

$$\begin{aligned}
 \theta(t_f - t_b) &= \frac{1}{2} \bar{c}_2 (t_f - t_b)^2 + \bar{c}_1 (t_f - t_b) + \bar{c}_0 = \theta_B \\
 \dot{\theta}(t_f - t_b) &= \bar{c}_2 (t_f - t_b) + \bar{c}_1 = \dot{\theta}_B = \omega \\
 \ddot{\theta}(t_f - t_b) &= \bar{c}_2 = \ddot{\theta}_B
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

и за крајот од набљудуваниот параболичен сегмент:

$$\begin{aligned}\theta(t_f) &= \frac{1}{2}\bar{c}_2 t_f^2 + \bar{c}_1 t_f + \bar{c}_0 = \theta_f \\ \dot{\theta}(t_f) &= \bar{c}_2 t_f + \bar{c}_1 = \dot{\theta}_f = 0 \\ \ddot{\theta}(t_f) &= \bar{c}_2 = \ddot{\theta}_f\end{aligned}\tag{5.23}$$

Од равенките (5.22) и (5.23) се определуваат вредностите на константите \bar{c}_1 и \bar{c}_2 :

$$\begin{cases} \bar{c}_2(t_f - t_b) + \bar{c}_1 = \omega \\ \bar{c}_2 t_f + \bar{c}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{c}_1 = \frac{\omega}{t_b} t_f, \bar{c}_2 = -\frac{\omega}{t_b}\tag{5.24}$$

додека константата \bar{c}_0 се определува на следниот начин:

$$\bar{c}_0 = \theta_f - \bar{c}_1 t_f - \frac{\bar{c}_2}{2} t_f^2 = \theta_f - \frac{\omega}{t_b} t_f^2 + \frac{\omega}{2t_b} t_f^2 = \theta_f - \frac{\omega}{2t_b} t_f^2\tag{5.25}$$

Оттука, положбата, брзината и забрзувањето на роботот на крајниот параболичен сегмент од траекторијата на Слика 5.2 се опишани со изразите:

$$\theta(t) = \theta_f - \frac{\omega}{2t_b} (t_f - t)^2\tag{5.26}$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\omega}{t_b} (t_f - t)\tag{5.27}$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{\omega}{t_b}\tag{5.28}$$

Бидејќи крајниот параболичен сегмент е симетричен со почетниот, но со негативно забрзување, може да се опише на следниот начин:

$$\theta(t) = \theta_f - \frac{c_2}{2} (t_f - t)^2\tag{5.29}$$

каде што:

$$c_2 = \frac{\omega}{t_b}\tag{5.30}$$

Времето на спојување на параболичните делови на почетокот t_b и крајот од линеарниот сегмент на траекторијата $t_f - t_b$ изнесува:

$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega}\tag{5.31}$$

Јасно е дека времето t_b не може да биде поголемо од половината од конечното време t_f , на кое му одговара параболично забрзување и успорување без линеарен сегмент.

Во најопшт случај планираната траекторија на движење на еден робот може да се претстави со полином од произволен степен:

$$\theta(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots + c_{n-1}t^{n-1} + c_nt^n \quad (5.32)$$

при што треба да се определат $n+1$ коефициент. Овие коефициенти се определуваат од граничните услови и со дефинирање потребен број нови меѓуточки. Бидејќи пресметувањето полиноми од висок степен е обемна и долготрајна работа, наместо траекторијата на движење на еден робот да се претстави со полином од обликот (5.32), се користи комбинација од полиноми со понизок степен за одделни сегменти од траекторијата. Овие сегменти се спојуваат така што ќе бидат задоволени соодветните гранични услови. Идејата е прикажана во продолжение.

Нека една траекторија на движење на робот е поделена на три сегменти, при што првиот сегмент се апроксимира со полином од 4. степен, вториот сегмент - со полином од 3. степен и последниот сегмент - со полином од 4. степен. Ваквата траекторија уште се нарекува 4-3-4 траекторија. Јасно е дека моделот на траекторијата ќе има 14 непознати коефициенти:

$$\theta(t)_1 = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 \quad (5.33)$$

$$\theta(t)_2 = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 \quad (5.34)$$

$$\theta(t)_3 = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 \quad (5.35)$$

за чие определување се потребни 14 гранични и други дополнителни услови. Тие се следните:

- (1) Познатата почетна положба θ_0
- (2) Почетната брзина која може да се зададе
- (3) Почетното забрзување кое може да се зададе
- (4) Положбата на првата меѓуточка е позната, бидејќи е еднаква со крајната положба за првиот сегмент
- (5) Едновремено, положбата на првата меѓуточка мора да биде еднаква со положбата на почетокот од вториот сегмент
- (6) Брзината на движење на роботот мора во секој миг да биде континуална, па така и во првата меѓуточка
- (7) И забрзувањето во меѓуточката не смее да има прекин
- (8) Положбата на втората меѓуточка мора да биде еднаква со крајната положба за вториот сегмент
- (9) Едновремено, положбата на втората меѓуточка мора да биде еднаква и со почетната положба за третиот сегмент, за да се обезбеди континуалност
- (10) Брзината на движење на роботот во втората меѓуточка мора да биде континуална (не смее да има прекин)
- (11) И забрзувањето во втората меѓуточка не смее да има прекин
- (12) Крајната положба е позната односно зададена
- (13) Крајната брзина е позната односно дефинирана
- (14) Крајното забрзување исто така е дефинирано

Заради поголема едноставност на пресметките, за комплетното движење на роботот може да се усвои една нормализирана променлива t , додека за секој од сегментите j може да се дефинира соодветно локално време τ_j . Исто така, може да се претпостави дека локалното почетно време за секој сегмент е $\tau_{j0} = 0$, а крајното време τ_{jf} е зададено. Врз основа на направените претпоставки и дадените услови (1) – (14), за набљудуваната 4-3-4 траекторија може да се запише:

(1) Познатата почетна положба θ_1 за првиот сегмент, која одговара на моментот $\tau_1 = 0$ води кон резултатот:

$$\theta(t_1 = 0) = a_0 = \theta_1 \quad (5.36)$$

(2) Познатата почетната брзина за првиот сегмент води кон резултатот:

$$\dot{\theta}(t_1 = 0) = a_1 = \dot{\theta}_1 \quad (5.37)$$

(3) Зададеното почетно забрзување за првиот сегмент условува:

$$\ddot{\theta}(t_1 = 0) = 2a_2 = \ddot{\theta}_1 \quad (5.38)$$

(4) Положбата на првата меѓуточка θ_2 е позната, бидејќи е еднаква со крајната положба за првиот сегмент во мигот τ_{1f} , па следува:

$$\theta_2 = a_0 + a_1(\tau_{1f}) + a_2(\tau_{1f})^2 + a_3(\tau_{1f})^3 + a_4(\tau_{1f})^4 \quad (5.39)$$

(5) Положбата на првата меѓуточка мора да биде еднаква со положбата на почетокот од вториот сегмент која одговара на локалното време $\tau_2 = 0$, па од (5.34) следува:

$$\theta_2 = b_0 \quad (5.40)$$

(6) Брзината на движење на роботот мора да биде континуална во првата меѓуточка, па:

$$b_1 = a_1 + 2a_2(\tau_{1f}) + 3a_3(\tau_{1f})^2 + 4a_4(\tau_{1f})^3 \quad (5.41)$$

(7) И забрзувањето во првата меѓуточка не смее да има прекин, па:

$$2b_2 = 2a_2 + 6a_3(\tau_{1f}) + 12a_4(\tau_{1f})^2 \quad (5.42)$$

(8) Положбата на втората меѓуточка θ_3 мора да биде еднаква со крајната положба за вториот сегмент која одговара на моментот τ_{2f} , поради што мора да биде исполнето:

$$\theta_3 = b_0 + b_1(\tau_{2f}) + b_2(\tau_{2f})^2 + b_3(\tau_{2f})^3 \quad (5.43)$$

(9) Положбата на втората меѓуточка мора да биде еднаква и со почетната положба за третиот сегмент, за да се обезбеди континуалност, па за $\tau_3 = 0$ следува:

$$\theta_3 = c_0 \quad (5.44)$$

(10) Брзината на движење на роботот во втората меѓуточка мора да биде континуална (не смее да има прекин), па мора да важи:

$$c_1 = b_1 + 2b_2(\tau_{2f}) + 3b_3(\tau_{2f})^2 \quad (5.45)$$

(11) Бидејќи и забрзувањето во втората меѓуточка не смее да има прекин, мора да биде исполнето:

$$2c_2 = 2b_2 + 6b_3(\tau_{2f}) \quad (5.46)$$

(12) Крајната положба θ_f е позната односно зададена, па со тоа е позната и положбата на крајот од третиот сегмент која одговара на локалното време τ_{3f} :

$$\theta_4 = c_0 + c_1(\tau_{3f}) + c_2(\tau_{3f})^2 + c_3(\tau_{3f})^3 + c_4(\tau_{4f})^4 = \theta_f \quad (5.47)$$

(13) Крајната брзина е позната односно дефинирана:

$$\dot{\theta}_4 = c_1 + 2c_2(\tau_{3f}) + 3c_3(\tau_{3f})^2 + 4c_4(\tau_{4f})^3 \quad (5.48)$$

(14) Крајното забрзување исто така е дефинирано:

$$\ddot{\theta}_4 = 2c_2 + 6c_3(\tau_{3f}) + 12c_4(\tau_{4f})^2 \quad (5.49)$$

Равенките (5.36) – (5.49) можат да се запишат во матричен облик:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \tau_{1f} & \tau_{1f}^2 & \tau_{1f}^3 & \tau_{1f}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\tau_{1f} & 3\tau_{1f}^2 & 4\tau_{1f}^3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6\tau_{1f} & 12\tau_{1f}^2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tau_{2f} & \tau_{2f}^2 & \tau_{2f}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\tau_{2f} & 3\tau_{2f}^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\tau_{2f} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tau_{3f} & \tau_{3f}^2 & \tau_{3f}^3 & \tau_{3f}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\tau_{3f} & 3\tau_{3f}^2 & 4\tau_{3f}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\tau_{3f} & 12\tau_{3f}^2 \end{bmatrix}$$

$$[\theta] = [M] \cdot [C] \quad (5.50)$$

каде што:

$$[\theta] = [\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \ddot{\theta}_2 \quad 0 \quad 0 \quad \theta_3 \quad \dot{\theta}_3 \quad \ddot{\theta}_3 \quad 0 \quad 0 \quad \theta_4 \quad \dot{\theta}_4 \quad \ddot{\theta}_4]^T \quad (5.51)$$

$$[C] = [b a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]^T \quad (5.52)$$

а нивното решение $[C]$ е одредено со изразот:

$$[C] = [M]^{-1}[\theta] \quad (5.53)$$

Постапката се повторува за секој од зглобовите на набљудуваниот робот одделно.

Сите траектории на движење дефинирани во просторот на зглобовите можат да се дефинираат и во Декартовиот простор. Основната разлика помеѓу планирањето траекторија на движење во Декартовиот простор и просторот на зглобовите е следната: при планирањето на траекторија на движење во Декартовиот простор она што се пресметува се позицијата и ориентацијата на роботот во просторот, па овие вредности мора да се „преведат“ во вредности на променливите на зглобовите со помош на инверзната кинематика на роботот. При планирањето траекторија на движење во просторот на зглобовите директно се пресметуваат вредностите на нивните променливи. Пресметувањето на вредностите на променливите на зглобовите на роботот врз основа на неговата положба во просторот преку инверзните кинематски равенки на роботот мора постојано да се повторува.



5.1. Со примена на полином од трет степен да се испланира траекторијата на движење на првиот зглоб од еден робот со шест степени слобода на движење, кој за време од 5 сек. треба да се придвижи од почетната положба одредена со аголот $\theta_0 = 30^\circ$ во крајната положба зададена со аголот $\theta_f = 75^\circ$. Да се пресметаат вредностите на аголот на зглобот за $t = 1, 2, 3, 4$ сек.

Решение: Со воведување на соодветните гранични услови од задачата во системот (5.4) се добива:

$$\theta(t_0) = c_0 = 30 \quad (5.54)$$

$$\theta(t_f) = (5^3)c_3 + (5^2)c_2 + (5)c_1 + c_0 = 75 \quad (5.55)$$

$$\dot{\theta}(t_0) = c_1 = 0 \quad (5.56)$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 3(5^2)c_3 + 2(5)c_2 + c_1 = 0 \quad (5.57)$$

ОДНОСНО:

$$\begin{cases} 125c_3 + 25c_2 + 30 = 75 \\ 75c_3 + 10c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 125 \\ 10 & 75 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 45 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (5.58)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{625} \begin{bmatrix} 75 & -125 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 45 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.4 \\ -0.72 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Како резултат, положбата, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб се опишани со следните релации:

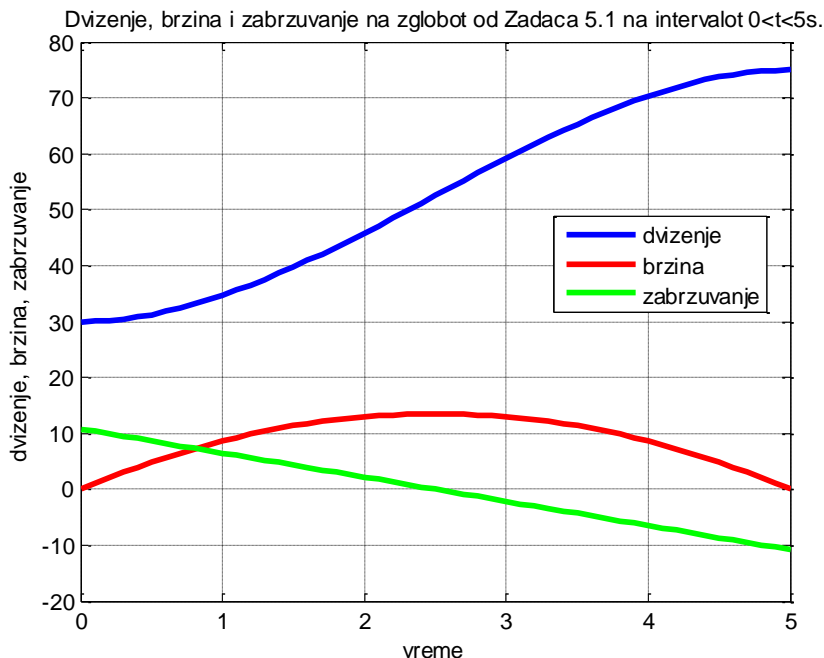
$$\theta(t) = -0.72t^3 + 5.4t^2 + 30 \quad (5.60)$$

$$\dot{\theta}(t) = -2.16t^2 + 10.8t \quad (5.61)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -4.32t + 10.8 \quad (5.62)$$

и графички се прикажани на Слика 5.3, од каде се забележува дека во почетокот од движењето потребното забрзување на зглобот изнесува $10.8^0 / \text{sec}^2$, додека на крајот од движењето забрзувањето изнесува $-10.8^0 / \text{sec}^2$ односно зглобот успорува. Бараните вредности на аголот на зглобот за $t = 1, 2, 3, 4 \text{ sec}$ се:

$$\theta(1) = 34.68^0, \quad \theta(2) = 45.84^0, \quad \theta(3) = 59.16^0, \quad \theta(4) = 70.32^0 \quad (5.63)$$



Слика 5.3. Графички приказ на положбата, брзината и забрзувањето на роботот од Задача 5.1

5.2. Нека роботската рака од Задача 5.1 го продолжува своето движење, така што набљудуваниот зглоб треба да се најде во положбата определена со аголот $\theta_f = 105^0$ по време од 3 sec. Да се определат аналитички и графички движењето, брзината и забрзувањето на зглобот на овој нов сегмент од неговата траекторија на движење.

Решение: И на овој нов сегмент од движењето на набљудуваниот зглоб неговата траекторија се опишува со полином од трет степен од дадениот општ облик (5.1), со тоа што коефициентите на полиномот (5.1) сега се определуваат врз основа на новите гранични услови. За почетни вредности на движењето на зглобот на овој сегмент се усвојуваат крајните вредности од претходниот сегмент на движење, што значи сега $\theta_0 = 75^0$ и $\theta_f = 105^0$; почетната и крајната брзина на движењето повторно, под претпоставка, се еднакви на нула.

Со воведување на соодветните гранични услови од задачата во системот (5.4) се добива:

$$\theta(t_0) = c_0 = 75 \quad (5.64)$$

$$\theta(t_f) = (3^3)c_3 + (3^2)c_2 + (3)c_1 + c_0 = 105 \quad (5.65)$$

$$\dot{\theta}(t_0) = c_1 = 0 \quad (5.66)$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 3(3^2)c_3 + 2(3)c_2 + c_1 = 0 \quad (5.67)$$

односно:

$$\begin{cases} 9c_3 + 3c_2 + 25 = 35 \\ 9c_3 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (5.68)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2.222 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Како резултат, положбата, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб на новиот сегмент од неговото движење се опишани со следните релации:

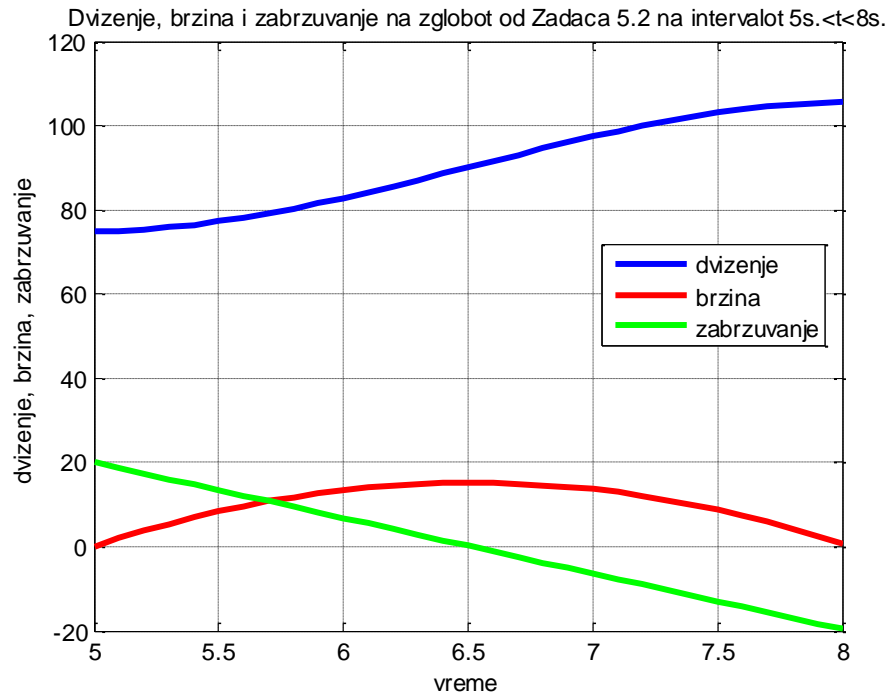
$$\theta(t) = -2.222t^3 + 10t^2 + 75 \quad (5.70)$$

$$\dot{\theta}(t) = -6.666t^2 + 20t \quad (5.71)$$

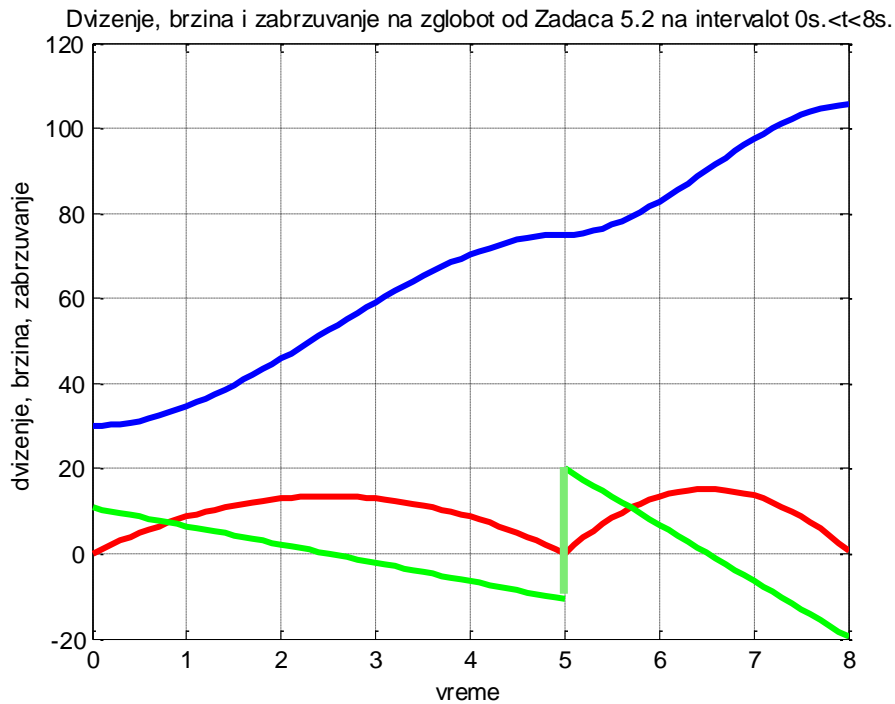
$$\ddot{\theta}(t) = -13.332t + 20 \quad (5.72)$$

Тие графички се прикажани на Слика 5.4. Положбата, брзината и забрзувањето на роботот од Задачите 5.1 и 5.2 можат да се прикажат за целото движење, од почетната точка $\theta_0 = 30^0$, па преку меѓуточката $\theta_{in} = 75^0$ до конечната точка $\theta_f = 105^0$, како што е тоа сторено на Слика 5.5. Сосема очекувано, граничните услови се целосно задоволени. Меѓутоа, иако континуална, кривата на брзината на движењето на зглобот го менува знакот на наклонот во меѓуточката помеѓу двата сегмента од набљудуваното движење од негативен во позитивен. Како

резултат на тоа во забрзувањето на зглобот во меѓуточката се јавува скок – мигновена промена од една во друга вредност. Дали роботот е во состојба да создаде такво забрзување или не е, тоа е веќе друго прашање за кое мора да се води сметка.



Слика 5.4. Графички приказ на положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од Задача 5.1 на следниот сегмент од движењето одредени во Задачата 5.2



Слика 5.5. Графички приказ на комплетното движење на зглобот од Задача 5.2

5.3. Првиот зглоб од роботска рака со шест степени слобода на движење треба да се придвижи од почетна положба одредена со аголот $\theta_i = 50^\circ$, во крајна положба, одредена со аголот $\theta_f = 80^\circ$, за време од $3s$. Траекторијата на движење на зглобот да се опише со полином од трет степен. Да се определи положбата, брзината и забрзувањето на зглобот во миговите $t = 1s$, $t = 2s$. и $t = 3s$. Под претпоставка, зглобот се задвижува од мирување и повторно запира кога ќе ја постигне саканата положба.

Решение: Според условот од задачата, траекторијата на движење на набљудуваниот зглоб се опишува со полиномот:

$$\theta(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (5.73)$$

чии коефициенти a_0, a_1, a_2, a_3 допрво треба да се определат од условите:

$$\begin{aligned} \theta(t_i) &= \theta_i \\ \theta(t_f) &= \theta_f \\ \dot{\theta}(t_i) &= \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f \end{aligned} \quad (5.74)$$

Во конкретниот случај:

$$\begin{aligned} \theta(t_i) &= 50 \\ \theta(t_f) &= 80 \\ \dot{\theta}(t_i) &= \dot{\theta}_i = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f = 0 \\ t_i &= 0, t_f = 3 \end{aligned} \quad (5.75)$$

па, за определување на непознатите коефициенти на полиномот (5.73), се добиваат следните равенки:

$$\begin{aligned} \theta(t_i) &= \theta(0) = a_3(0) + a_2(0) + a_1(0) + a_0 = \theta_i = 50 \\ \theta(t_f) &= \theta(3) = a_3(3)^3 + a_2(3)^2 + a_1(3) + a_0 = \theta_f = 80 \\ \dot{\theta}(t_i) &= \dot{\theta}(0) = 3a_3 t_i^2 + 2a_2 t_i + a_1 = 3a_3(0) + 2a_2(0) + a_1 = \dot{\theta}_i = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}(3) = 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 = 3a_3(3)^2 + 2a_2(3) + a_1 = \dot{\theta}_f = 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

Од првата равенка на системот (5.76) непосредно следува:

$$a_0 = 50 \quad (5.77)$$

додека од третата следува:

$$a_1 = 0 \quad (5.78)$$

Со воведувањето на вредностите (5.77) – (5.78) во преостанатите две равенки од системот (5.76) и по мало средување, за определување на останатите два коефициенти на полиномот (5.73) се добиваат равенките:

$$\begin{aligned} 27a_3 + 9a_2 &= 30 \\ 27a_3 + 6a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.79)$$

чии решенија се:

$$a_2 = 10, a_3 = -\frac{20}{9} \quad (5.80)$$

Следствено, траекторијата на движење на првиот зглоб од набљудуваната роботска рака ќе биде опишана со полиномот:

$$\theta(t) = -\frac{20}{9}t^3 + 10t^2 + 50 \quad (5.81)$$

додека неговата брзина и забрзување се дадени со изразите:

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{20}{3}t^2 + 20t \quad (5.82)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{40}{3}t + 20 \quad (5.83)$$

Истите графички се прикажани на Слика 5.6.

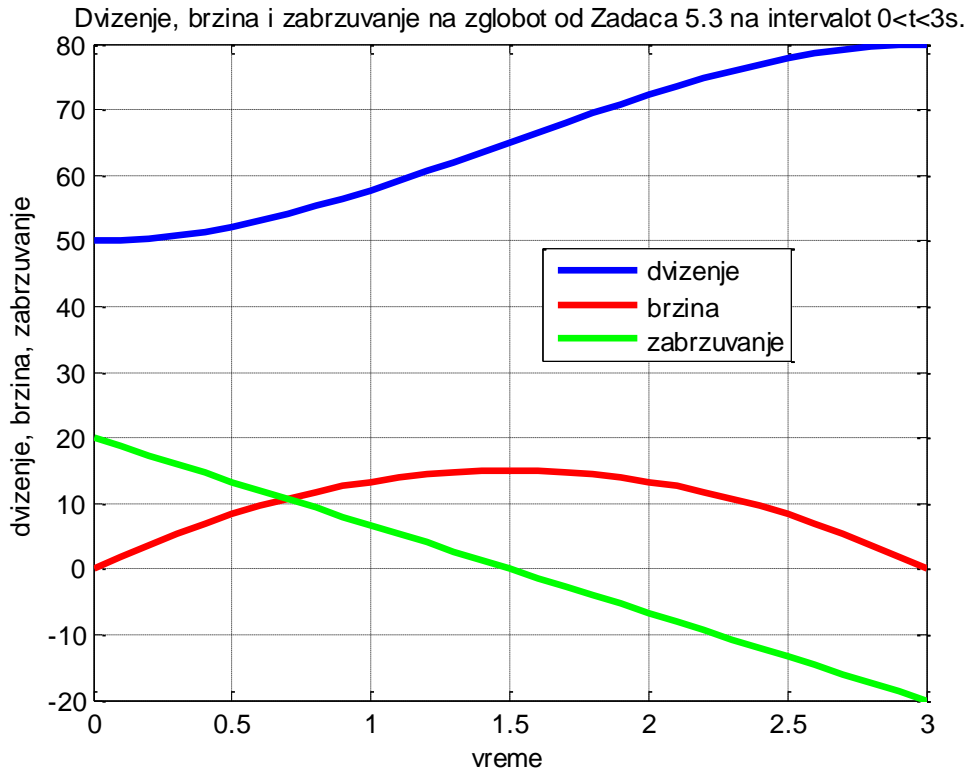
Положбата, брзината и забрзувањето на зглобот во миговите $t = 1s.$, $t = 2s.$ и $t = 3s.$ изнесуваат:

$$\begin{aligned} \theta(1) &= -\frac{20}{9} + 10 + 50 = 57.8 \\ \dot{\theta}(1) &= -\frac{20}{3} + 20 = 13.3 \\ \ddot{\theta}(1) &= -\frac{40}{3} + 20 = 6.7 \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} \theta(2) &= -\frac{20}{9}(2)^3 + 10(2)^2 + 50 = 72.2 \\ \dot{\theta}(2) &= -\frac{20}{3}(2)^2 + 20(2) = 13.3 \\ \ddot{\theta}(2) &= -\frac{40}{3}(2) + 20 = -6.7 \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\theta(3) = -\frac{20}{9}(3)^3 + 10(3)^2 + 50 = 80$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(3) &= -\frac{20}{3}(3)^2 + 20(3) = 0 \\ \ddot{\theta}(3) &= -\frac{40}{3}(3) + 20 = -20\end{aligned}\tag{5.86}$$



Слика 5.6. Графички приказ на положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од роботската рака од Задача 5.3

5.4. Третиот зглоб од една роботска рака со шест степени слобода на движење треба да се придвижи од почетна положба $\theta_i = 20^0$ во крајна положба $\theta_f = 80^0$, за време од $4s$. Траекторијата на движење на зглобот да се апроксимира со полином од трет степен и графички да се прикажат неговата положба, брзина и забрзување. Под претпоставка, зглобот се задвижува од мирување, но на крајот од движењето треба да има брзина од $5^0/s$.

Решение: Положбата, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб ќе бидат опишани со равенките:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \\ \dot{\theta}(t) &= 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \\ \ddot{\theta}(t) &= 6a_3t + 2a_2\end{aligned}\tag{5.87}$$

Непознатите коефициенти a_0, a_1, a_2, a_3 се определуваат од условите:

$$\begin{aligned}
 \theta(t_i) &= \theta_i = 20 \\
 \theta(t_f) &= \theta_f = 80 \\
 \dot{\theta}(t_i) &= \dot{\theta}_i = 0 \\
 \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f = 5 \\
 t_i &= 0, t_f = 4
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

кои водат кон следниот систем равенки:

$$\begin{aligned}
 \theta(t_i) &= \theta(0) = a_3(0) + a_2(0) + a_1(0) + a_0 = \theta_i = 20 \\
 \theta(t_f) &= \theta(4) = a_3(4)^3 + a_2(4)^2 + a_1(4) + a_0 = \theta_f = 80 \\
 \dot{\theta}(t_i) &= \dot{\theta}(0) = 3a_3t_i^2 + 2a_2t_i + a_1 = 3a_3(0) + 2a_2(0) + a_1 = \dot{\theta}_i = 0 \\
 \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}(4) = 3a_3t_f^2 + 2a_2t_f + a_1 = 3a_3(4)^2 + 2a_2(4) + a_1 = \dot{\theta}_f = 5
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

Од првата равенка на системот (5.89) непосредно следува:

$$a_0 = 20 \tag{5.90}$$

додека од третата следува:

$$a_1 = 0 \tag{5.91}$$

Со воведувањето на вредностите (5.90) – (5.91) во преостанатите две равенки од системот (5.89) и по мало средување, за определување на останатите два коефициенти се добиваат равенките:

$$\begin{aligned}
 64a_3 + 16a_2 &= 60 \\
 48a_3 + 8a_2 &= 5
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

чии решенија се:

$$a_2 = 10, a_3 = -\frac{25}{16}$$

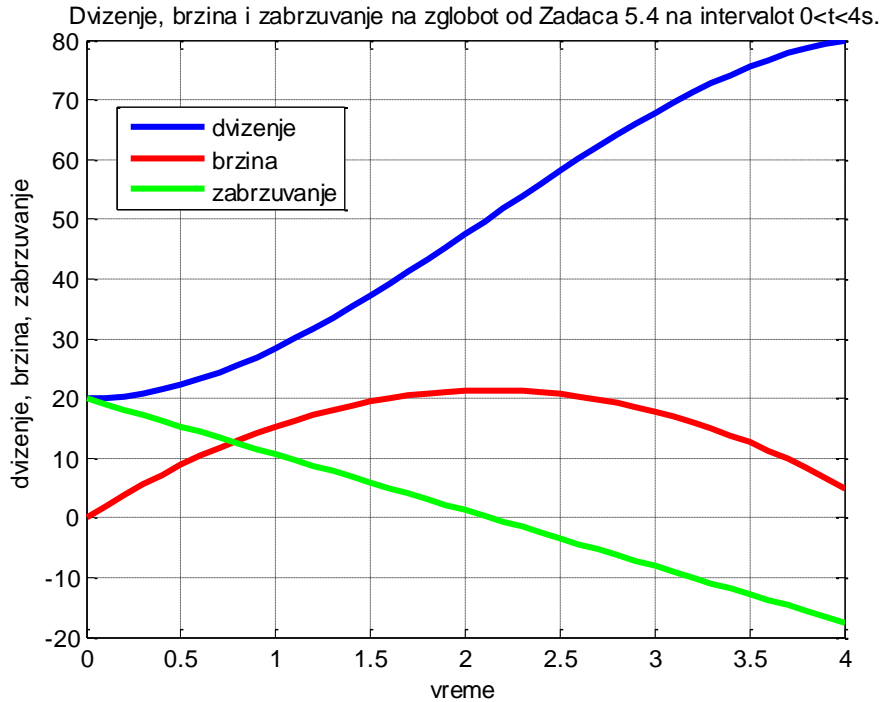
Следствено, траекторијата, брзината и забрзувањето на третиот зглоб од набљудуваната роботска рака ќе бидат опишани со полиномите:

$$\theta(t) = -\frac{25}{16}t^3 + 10t^2 + 20 \tag{5.93}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{75}{16}t^2 + 20t \tag{5.94}$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{75}{8}t + 20 \tag{5.95}$$

Истите графички се прикажани на Слика 5.7.



Слика 5.7. Положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од роботската рака од Задача 5.4

5.5. Вториот зглоб од една роботска рака со шест степени слобода на движење се задвижува од почетната положба $\theta_i = 20^0$ до меѓуположбата $\theta_m = 80^0$ за време од $5s$. и потоа продолжува до крајната положба $\theta_f = 25^0$ за нови $5s$. Да се определат и графички прикажат движењето, брзината и забрзувањето на зглобот, ако неговата траекторија претставува полином од трет степен. Зглобот, под претпоставка, запира во меѓуточката, пред да го продолжи своето движење до конечната дестинација, кога повторно запира.

Решение: За првиот дел од движењето, определено со условите:

$$\theta(t_i) = 20$$

$$\theta(t_m) = 80$$

$$\dot{\theta}(t_i) = \dot{\theta}_i = 0$$

$$\dot{\theta}(t_m) = \dot{\theta}_m = 0$$

$$t_i = 0, t_m = 5$$

(5.96)

се добива:

$$\theta(t_i) = \theta(0) = a_3(0) + a_2(0) + a_1(0) + a_0 = \theta_i = 20 \Rightarrow a_0 = 20$$

$$\theta(t_m) = \theta(5) = a_3(5)^3 + a_2(5)^2 + a_1(5) + a_0 = \theta_m = 80$$

$$\dot{\theta}(t_i) = \dot{\theta}(0) = 3a_3t_i^2 + 2a_2t_i + a_1 = 3a_3(0) + 2a_2(0) + a_1 = \dot{\theta}_i = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\dot{\theta}(t_m) = \dot{\theta}(5) = 3a_3t_m^2 + 2a_2t_m + a_1 = 3a_3(5)^2 + 2a_2(5) + a_1 = \dot{\theta}_m = 0 \quad (5.97)$$

$$\left. \begin{array}{l} 125a_3 + 25a_2 = 60 \\ 75a_3 + 10a_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_2 = \frac{36}{5}, a_3 = -\frac{24}{25} \quad (5.98)$$

Следствено, движењето, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб во првите 5 s. се определени со полиномите:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= -\frac{24}{25}t^3 + \frac{36}{5}t^2 + 20 \\ \dot{\theta}(t) &= -\frac{72}{25}t^2 + \frac{72}{5}t \\ \ddot{\theta}(t) &= -\frac{144}{25}t + \frac{72}{5} \end{aligned} \quad (5.99)$$

За вториот дел од движењето важат условите:

$$\begin{aligned} \theta(t_m) &= 80 \\ \theta(t_f) &= 25 \\ \dot{\theta}(t_m) &= \dot{\theta}_m = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f = 0 \\ t_m &= 0, t_f = 5 \end{aligned} \quad (5.100)$$

па коефициентите a_0, a_1, a_2, a_3 за вториот дел од траекторијата на движењето на набљудуваниот зглоб ќе претставуваат решенија на системот равенки:

$$\begin{aligned} \theta(t_m) = \theta(0) &= a_3(0) + a_2(0) + a_1(0) + a_0 = \theta_m = 80 \\ \theta(t_f) = \theta(5) &= a_3(5)^3 + a_2(5)^2 + a_1(5) + a_0 = \theta_f = 25 \\ \dot{\theta}(t_m) = \dot{\theta}(0) &= 3a_3t_m^2 + 2a_2t_m + a_1 = 3a_3(0) + 2a_2(0) + a_1 = \dot{\theta}_m = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}(5) &= 3a_3t_f^2 + 2a_2t_f + a_1 = 3a_3(5)^2 + 2a_2(5) + a_1 = \dot{\theta}_f = 0 \end{aligned} \quad (5.101)$$

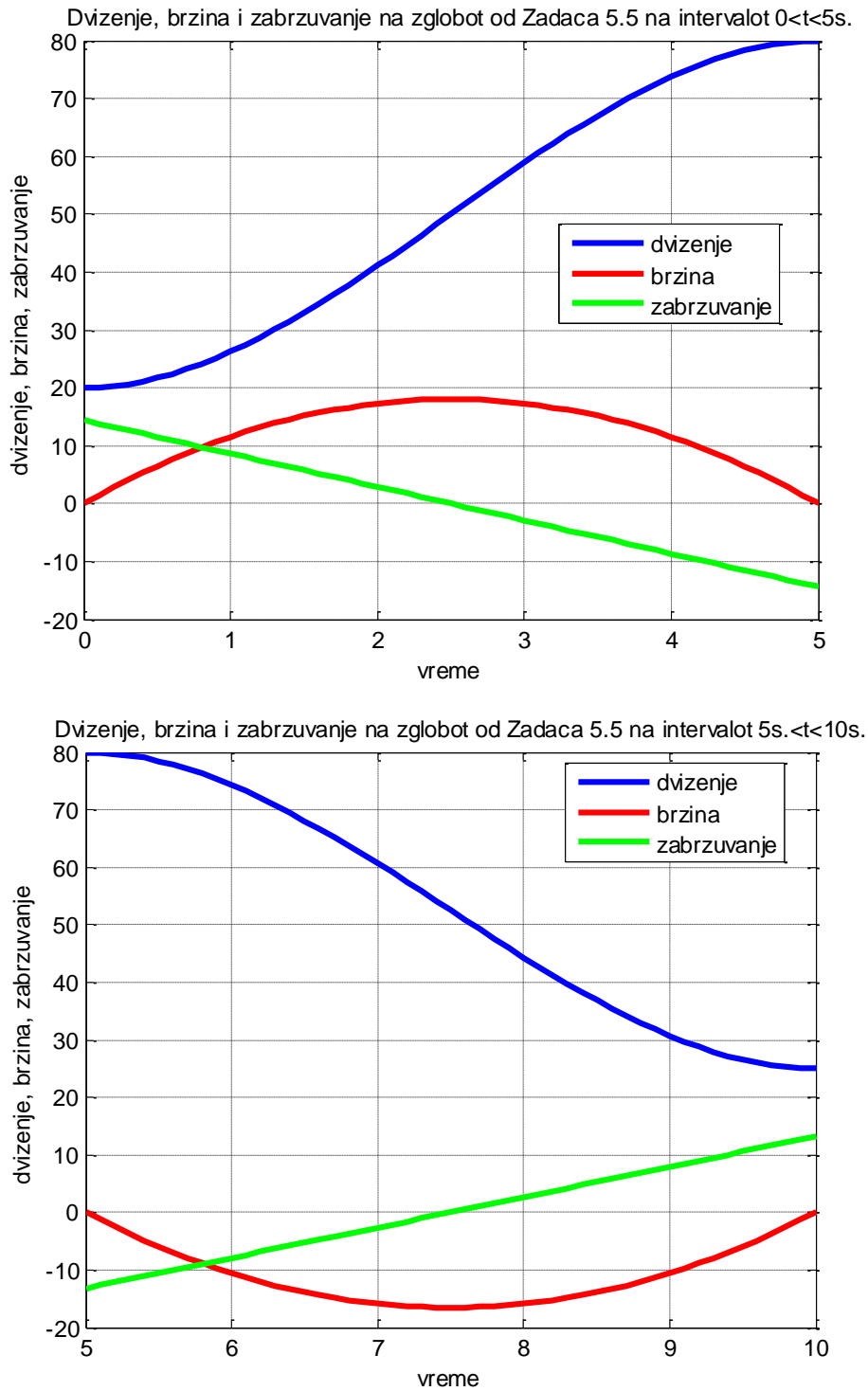
односно системот равенки:

$$\begin{aligned} a_0 &= 80 \\ 125a_3 + 25a_2 + 80 &= 25 \\ a_1 &= 0 \\ 75a_3 + 10a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.102)$$

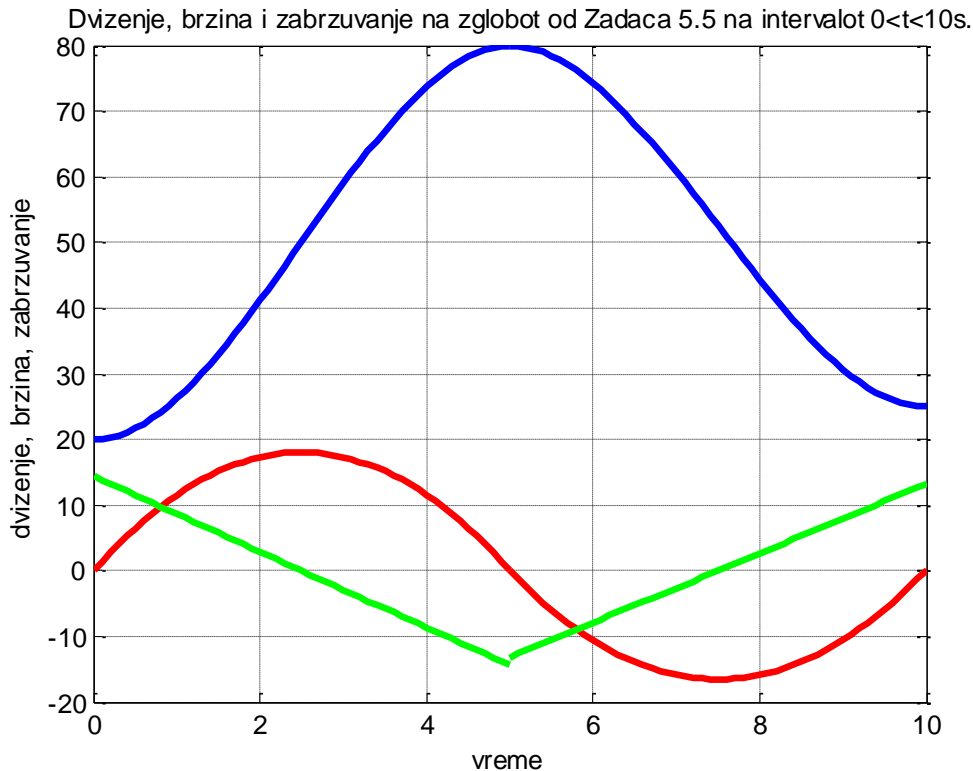
и тие изнесуваат:

$$a_0 = 80, a_1 = 0, a_2 = -\frac{33}{5}, a_3 = \frac{22}{25} \quad (5.103)$$

Движењето, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб графички се прикажани на Слика 5.8.



Слика 5.8. Положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од роботската рака од Задача 5.5 на интервалот $0 \leq t \leq 5s.$ и на интервалот $5s. \leq t \leq 10s.$



Слика 5.9. Движењето (сина линија), брзината (црвена линија) и забрзувањето (зелена линија) на зглобот од роботската рака од Задача 5.5 на интервалот $0 \leq t \leq 10s$.

5.6. Да се повтори Задача 5.1 под претпоставка дека почетното и крајното забрзување на зглобот од роботот се $\ddot{\theta}(t_i) = \ddot{\theta}_i = 5^0 / \text{sec}^2$ и $\ddot{\theta}(t_f) = \ddot{\theta}_f = -5^0 / \text{sec}^2$, а траекторијата на движењето е претставена со полином од петти степен.

Решение: За дадените почетни услови, и врз основа на равенките (5.5) – (5.6), се добива:

$$\theta(t_i) = \theta_i = c_0 = 30 \quad (5.104)$$

$$\dot{\theta}(t_i) = c_1 = 0 \quad (5.105)$$

$$\ddot{\theta}(t_i) = 2c_2 = 5 \quad (5.106)$$

$$\theta(t_f) = (5^5)c_5 + (5^4)c_4 + (5^3)c_3 + (5^2)c_2 + (5)c_1 + c_0 = 75 \quad (5.107)$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 5(5^4)c_5 + 4(5^3)c_4 + 3(5^2)c_3 + 2(5)c_2 + c_1 = 0 \quad (5.108)$$

$$\ddot{\theta}(t_f) = 20(5^3)c_5 + 12(5^2)c_4 + 6(5)c_3 + 2c_2 = -5 \quad (5.109)$$

од каде непосредно следуваат вредностите на коефициентите на полиномот (5.5):

$$c_0 = 30, c_1 = 0, c_2 = 2.5, c_3 = 1.6, c_4 = -0.58, c_5 = 0.0464 \quad (5.110)$$

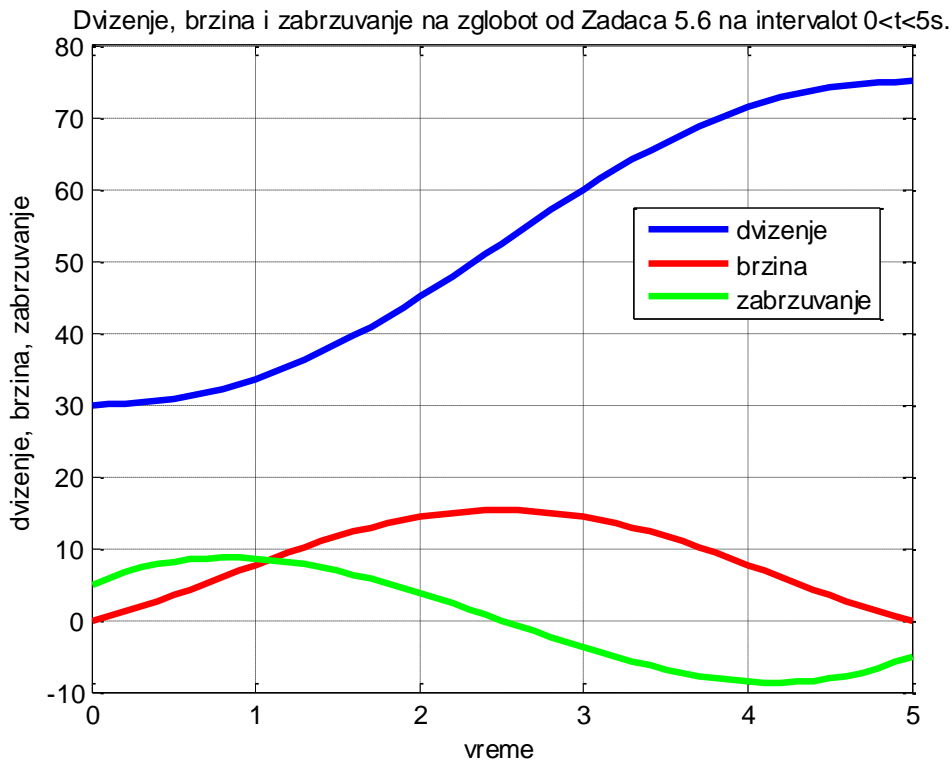
Следствено, положбата, брзината и забрзувањето на роботот од Задача 5.1 во овој случај ќе бидат опишани со изразите:

$$\theta(t) = 0.0464t^5 - 0.58t^4 + 1.6t^3 + 2.5t^2 + 30 \quad (5.111)$$

$$\dot{\theta}(t) = 0.232t^4 - 2.32t^3 + 4.8t^2 + 5t \quad (5.112)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 0.928t^3 - 6.96t^2 + 9.6t + 5 \quad (5.113)$$

и истите се прикажани графички на Слика 5.10.



Слика 5.10. Графички приказ на положбата, брзината и забрзувањето на роботот од Задача 5.6

5.7. Движењето на зглобовите од една роботска рака во просторот на зглобовите е претставено со полиномни траектории од петти степен. Да се определат коефициентите на соодветниот полином од петти степен, ако набљудуваниот зглоб треба да се придвижи од почетната положба $\theta_i = 0^0$ во крајна положба $\theta_f = 75^0$, за време од $3s$. Почетната и крајната брзина, под претпоставка се нулеви, додека почетното забрзување изнесува $10^0/s$, а крајното забрзување (успорубање) е $-10^0/s$.

Решение: Движењето, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб се опишани со следните полиноми:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \\ \dot{\theta}(t) &= 5a_5t^4 + 4a_4t^3 + 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \\ \ddot{\theta}(t) &= 20a_5t^3 + 12a_4t^2 + 6a_3t + 2a_2 \end{aligned} \quad (5.114)$$

чии коефициенти $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ се определуваат од условите:

$$\begin{aligned} \theta(t_i) = \theta_i = 0, \quad \theta(t_f) = \theta_f = 75 \\ \dot{\theta}(t_i) = \dot{\theta}_i = 0, \quad \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f = 0 \\ \ddot{\theta}(t_i) = \ddot{\theta}_i = 10, \quad \ddot{\theta}(t_f) = \ddot{\theta}_f = -10 \\ t_i = 0, t_f = 3 \end{aligned} \tag{5.115}$$

Со воведувањето на условите (5.115) во равенките (5.114), се добива следниот систем од шест равенки по непознатите коефициенти $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ на полиномите (5.114):

$$\begin{aligned} \theta(t_i) &= a_5 t_i^5 + a_4 t_i^4 + a_3 t_i^3 + a_2 t_i^2 + a_1 t_i + a_0 = \\ &= a_5(0) + a_4(0) + a_3(0) + a_2(0) + a_1(0) + a_0 = \theta_i = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t_i) &= 5a_5 t_i^4 + 4a_4 t_i^3 + 3a_3 t_i^2 + 2a_2 t_i + a_1 = \\ &= 5a_5(0) + 4a_4(0) + 3a_3(0) + 2a_2(0) + a_1 = \dot{\theta}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t_i) &= 20a_5 t_i^3 + 12a_4 t_i^2 + 6a_3 t_i + 2a_2 = \\ &= 20a_5(0) + 12a_4(0) + 6a_3(0) + 2a_2 = \ddot{\theta}_i = 10 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(t_f) &= a_5 t_f^5 + a_4 t_f^4 + a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 = \\ &= a_5(3)^5 + a_4(3)^4 + a_3(3)^3 + a_2(3)^2 + a_1(3) + a_0 = \theta_f = 75 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 243a_5 + 81a_4 + 27a_3 = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t_f) &= 5a_5 t_f^4 + 4a_4 t_f^3 + 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 = \\ &= 5a_5(3)^4 + 4a_4(3)^3 + 3a_3(3)^2 + 2a_2(3) + a_1 = \dot{\theta}_f = 0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 405a_5 + 108a_4 + 27a_3 = -30 \end{aligned}$$

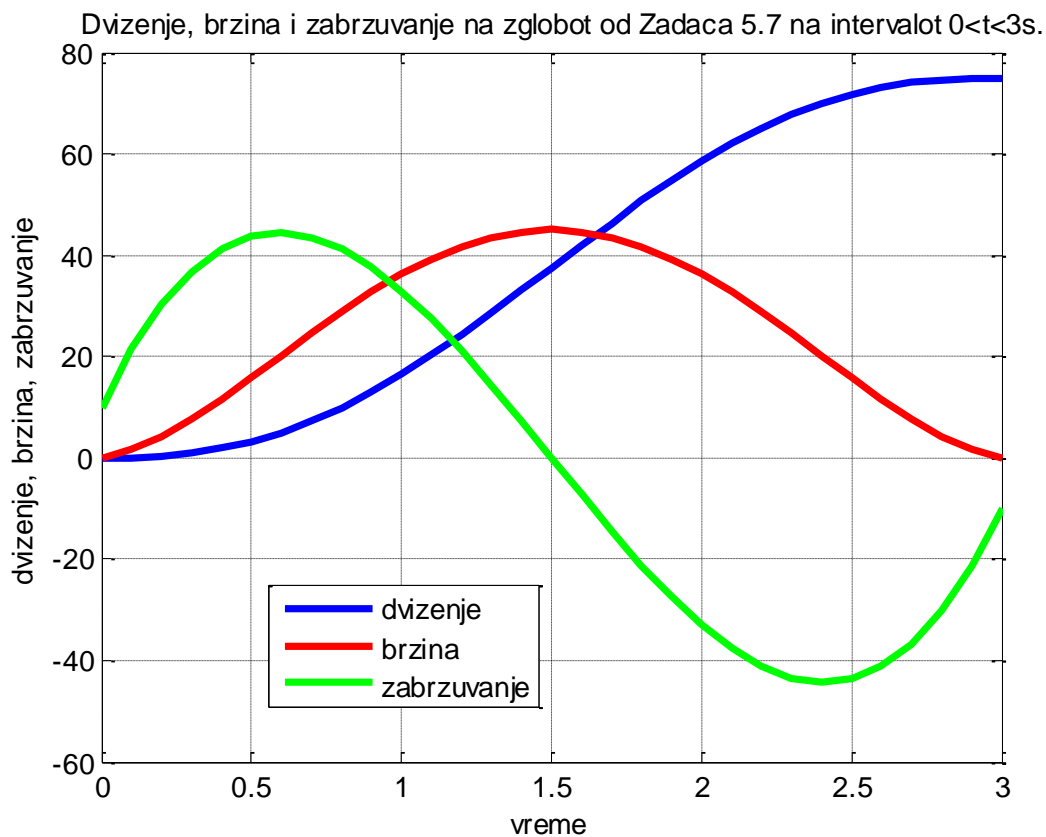
$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t_f) &= 20a_5 t_f^3 + 12a_4 t_f^2 + 6a_3 t_f + 2a_2 = \\ &= 20a_5(3)^3 + 12a_4(3)^2 + 6a_3(3) + 2a_2 = -10 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 540a_5 + 108a_4 + 18a_3 = -20 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 243a_5 + 81a_4 + 27a_3 &= 30 \\ 405a_5 + 108a_4 + 27a_3 &= -30 \\ 540a_5 + 108a_4 + 18a_3 &= -20 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 9a_5 + 3a_4 + a_3 &= \frac{10}{9} \\ 15a_5 + 4a_4 + a_3 &= -\frac{10}{9} \\ 30a_5 + 6a_4 + a_3 &= -\frac{10}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.48 \\ -11.1 \\ 21.1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.5 \\ -11 \\ 21 \end{bmatrix} \quad (5.116)$$

Следствено, движењето, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб се опишани со изразите:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 1.5t^5 - 11t^4 + 21t^3 + 5t^2 \\ \dot{\theta}(t) &= 7.5t^4 - 44t^3 + 63t^2 + 10t \\ \ddot{\theta}(t) &= 30t^3 - 132t^2 + 126t + 10 \end{aligned} \quad (5.117)$$



Слика 5.11. Графички приказ на положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од Задача 5.7

5.8. Првиот зглоб од една роботска рака со шест степени слобода на движење треба да се придвижи со константна брзина $\omega = 30^0 / s$, од почетната положба $\theta_i = 30^0$ во крајна положба $\theta_f = 120^0$, за време од $4s$. Да се определи времето t_b кое ги карактеризира параболичните делови од траекторијата на движење и графички да се прикажат движењето, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб.

Решение: Траекторијата на движење на набљудуваниот зглоб од задачата во просторот на зглобовите претставува линеарен сегмент споен со по еден параболичен сегмент на почетокот и на крајот, соодветно. Нека A е точка на спојување на почетниот, а B – точка на спојување на крајниот параболичен сегмент со линеарниот. Времето t_b кое ја карактеризира точката на спојување на почетниот параболичен сегмент со линеарниот, се определува според формулата:

$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega} \quad (5.118)$$

и, во конкретниот пример, изнесува:

$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega} = \frac{30 - 120 + 30 \cdot 4}{30} = 1 \quad (5.119)$$

Почетниот параболичен сегмент од траекторијата $t_i \leq t \leq t_b$, односно $\theta_i \leq \theta \leq \theta_A$, е опишан со релациите за движење, брзина и забрзување:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_i + \frac{\omega}{2t_b} t^2 = 30 + 15t^2 \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{\omega}{t_b} t = 30t \\ \ddot{\theta}(t) &= \frac{\omega}{t_b} = 30 \end{aligned} \quad (5.120)$$

Изразите (5.120) претставуваат движење со константно забрзување. Ова забрзување ја генерира потребната брзина на зглобот од набљудуваната роботска рака во крајните точки A и B од линеарниот сегмент на траекторијата. Брзината на движењето на роботот на линеарниот сегмент е, се разбира, константна и се одбира во согласност со физичките можности на актуаторите.

За линеарниот сегмент од траекторијата $t_b \leq t \leq t_f - t_b$ односно $\theta_A \leq \theta \leq \theta_B$ важи:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_A - \omega t_b + \omega t \\ \dot{\theta}_A &= \dot{\theta}_B = \omega \\ \ddot{\theta}_A &= 0 = \ddot{\theta}_B \end{aligned} \quad (5.121)$$

Крајниот параболичен сегмент $t_f - t_b \leq t \leq t_f$, односно $\theta_B \leq \theta \leq \theta_f$, е симетричен со почетниот, но се одликува со негативно забрзување, па ќе биде опишан со релациите:

$$\theta(t) = \theta_f - \frac{\omega}{2t_b} (t_f - t)^2 = 120 - 15(4 - t)^2$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= \frac{\omega}{t_b}(t_f - t) = 30(4 - t) \\ \ddot{\theta}(t) &= -\frac{\omega}{t_b} = -30\end{aligned}\tag{5.122}$$

5.9. Еден зглоб треба да се помести од почетна положба на мирување одредена со аголот θ_0 во крајна положба на мирување одредена со аголот θ_f , за време t_f . Да се определи времето t_f , под претпоставка дека θ_0 и θ_f се познати константи, така што ќе важи следното ограничување: $|\dot{\theta}_{\max}(t)| < \dot{\theta}_{\max}$. Под претпоставка, $\dot{\theta}_{\max}$ е позната позитивна константа. Траекторијата на движење на зглобот од положбата θ_0 до положбата θ_f да се апроксимира со полином од трет степен.

Решение: Ако се усвои $t_0 = 0$, за полиномот од трет степен:

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3\tag{5.123}$$

со кој е претставена траекторијата на движење на набљудуваниот зглоб од задачата, важи:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= a_0 = \theta_0 \\ \theta(t_f) &= a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 = \theta_f \\ \dot{\theta}(0) &= a_1 = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 = 0\end{aligned}\tag{5.124}$$

Со решавање на овој систем равенки по непознатите $a_i; i = 0,1,2,3$ се добива:

$$\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} \\ a_3 &= \frac{-2(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}\end{aligned}\tag{5.125}$$

па, оттука:

$$\theta(t) = \theta_f + \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}t^2 - \frac{2(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}t^3\tag{5.126}$$

Брзината на набљудуваниот зглоб $\dot{\theta}(t)$ на интервалот $[\theta_0, \theta_f]$, односно интервалот $[0, t_f]$ е дадена со релацијата:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}t - \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}t^2 \quad (5.127)$$

а неговото забрзување $\ddot{\theta}(t)$ со изразот:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} - \frac{12(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}t \quad (5.128)$$

Бидејќи $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f = 0$, очигледно брзината $\dot{\theta}(t)$ има максимум на интервалот $[0, t_f]$ кој се определува од условот $\ddot{\theta}(t_m) = 0$:

$$\ddot{\theta}(t_m) = \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} - \frac{12(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}t_m = 0 \Rightarrow t_m = \frac{t_f}{2} \quad (5.129)$$

Точката $t_m = \frac{t_f}{2}$ го одредува максимумот на брзината $\dot{\theta}(t)$:

$$\dot{\theta}(t_m) = \dot{\theta}\left(\frac{t_f}{2}\right) = \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{2t_f} \quad (5.130)$$

кој, според условот од задачата треба да го задоволува неравенството $|\dot{\theta}_{\max}(t)| < \dot{\theta}_{\max}$. Оттука следува:

$$\left| \dot{\theta}\left(\frac{t_f}{2}\right) \right| < \dot{\theta}_{\max} \Rightarrow \frac{3|\theta_f - \theta_0|}{2t_f} < \dot{\theta}_{\max} \Rightarrow t_f > \frac{3|\theta_f - \theta_0|}{2\dot{\theta}_{\max}} \quad (5.131)$$

5.10. Почетната позиција на еден зглоб е θ_0 , а крајната позиција θ_f . Зглобот се задвижува од почетната позиција θ_0 до крајната позиција θ_f за време t_f . Под претпоставка, $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_f = 0$, а θ_0 и θ_f се познати константи. Траекторијата на движење на зглобот да се апроксимира со полином од трет степен. Притоа да се определи времето на извршување на движењето t_f , така што максималното забрзување на зглобот сигурно ќе биде помало од $\ddot{\theta}_{\max} = \text{const.} > 0$ по апсолутна вредност.

Решение: Траекторијата на движење на зглобот и неговата брзина се дадени со изразите:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \\ \dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2\end{aligned}\tag{5.132}$$

па, за $t = t_0 = 0$ и $t = t_f$ важи:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= a_0 = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) &= a_1 = 0 \\ \theta(t_f) &= a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 = \theta_f \\ \dot{\theta}(t_f) &= a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 = 0\end{aligned}\tag{5.133}$$

Оттука:

$$\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= 0 \\ \left. \begin{aligned} a_2t_f^2 + a_3t_f^3 &= \theta_f - \theta_0 \\ 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_f^2 & t_f^3 \\ 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_f - \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_f^2 & t_f^3 \\ 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_f - \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ a_2 &= \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} \\ a_3 &= \frac{-2(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}\end{aligned}\tag{5.134}$$

Коефициентите $a_i; i = 0,1,2,3$ на полиномот од трет степен, со кој е претставена траекторијата на движење на набљудуваниот зглоб од задачата, се определени во функција од параметрите θ_0 , θ_f и t_f , па, така:

$$\theta(t) = \theta_f + \frac{3(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}t^2 - \frac{2(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}t^3\tag{5.135}$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}t - \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}t^2\tag{5.136}$$

и:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} - \frac{12(\theta_f - \theta_0)}{t_f^3}t\tag{5.137}$$

Изразот (5.136) ја претставува брзината на набљудуваниот зглоб $\dot{\theta}(t)$ на интервалот $[\theta_0, \theta_f]$, односно интервалот $[0, t_f]$, а изразот (5.137) го претставува забрзувањето на зглобот $\ddot{\theta}(t)$, кое е линеарно. Следствено, неговата максимална вредност е на краевите од набљудуваниот интервал:

$$\begin{aligned} |\ddot{\theta}(t_0)| = |\ddot{\theta}_0| &= \left| \frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} \right| = \frac{6|\theta_f - \theta_0|}{t_f^2} = \left| \max_{t \in (0, t_f)} \ddot{\theta}(t) \right| \\ |\ddot{\theta}(t_f)| = |\ddot{\theta}_f| &= \left| -\frac{6(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} \right| = \frac{6|\theta_f - \theta_0|}{t_f^2} = \left| \max_{t \in (0, t_f)} \ddot{\theta}(t) \right| \end{aligned} \quad (5.138)$$

Од условот на задачата:

$$\left| \max_{t \in (0, t_f)} \ddot{\theta}(t) \right| < \ddot{\theta}_{\max} \quad (5.139)$$

и (5.138) следува:

$$\left| \max_{t \in (0, t_f)} \ddot{\theta}(t) \right| < \ddot{\theta}_{\max} \Rightarrow \frac{6|\theta_f - \theta_0|}{t_f^2} < \ddot{\theta}_{\max} \Rightarrow t_f > \sqrt{\frac{6|\theta_f - \theta_0|}{\ddot{\theta}_{\max}}} \quad (5.140)$$

5.11. Траекториите на движење на еден зглоб се $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$. Траекторијата $\theta_1(t)$ го опишува движењето на зглобот во интервалот $0 \leq t \leq t_1$, додека траекторијата $\theta_2(t)$ го опишува движењето на зглобот во интервалот $t_1 \leq t \leq t_2$. Нека почетната положба и брзина на зглобот се нулеви, додека неговата крајна положба е θ_2 . Под претпоставка, брзината и забрзувањето на зглобот на крајот од движењето се нулеви. Ако $\theta_1(t)$ е полином од втор степен, а $\theta_2(t)$ е полином од трет степен, да се определат нивните коефициенти, имајќи на ум дека положбата и брзината на зглобот на крајот од интервалот $(0, t_1)$ е иста со неговата положба и брзина на почетокот од интервалот (t_1, t_2) .

Решение: Движењето, брзината и забрзувањето на зглобот по првата траекторија, која е претставена со полином од втор степен се опишани со равенките:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\ \dot{\theta}_1(t) &= 2a_2 t + a_1 \\ \ddot{\theta}_1(t) &= 2a_2 \end{aligned} \quad (5.141)$$

Меѓутоа, заради дадените почетни услови:

$$\theta_1(0) = a_0 = 0$$

$$\dot{\theta}_1(0) = a_1 = 0 \quad (5.142)$$

тие поминуваат во облик:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= a_2 t^2 \\ \dot{\theta}_1(t) &= 2a_2 t \\ \ddot{\theta}_1(t) &= 2a_2 \end{aligned} \quad (5.143)$$

Движењето, брзината и забрзувањето на зглобот по втората траекторија, која е опишана со полином од трет степен, можат да се претстават на следниот начин:

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= b_3(t-t_1)^3 + b_2(t-t_1)^2 + b_1(t-t_1) + b_0 \\ \dot{\theta}_2(t) &= 3b_3(t-t_1)^2 + 2b_2(t-t_1) + b_1 \\ \ddot{\theta}_2(t) &= 6b_3(t-t_1) + 2b_2 \end{aligned} \quad (5.144)$$

Непознатите коефициенти a_2, b_0, b_1, b_2, b_3 се определуваат од преостанатите гранични услови на задачата. Така, од условите за t_1 се добива:

$$\theta_2(t_1) = b_0 = \theta_1(t_1) = a_2 t_1^2 \Rightarrow b_0 = a_2 t_1^2 \quad (5.145)$$

$$\dot{\theta}_2(t_1) = b_1 = \dot{\theta}_1(t_1) = 2a_2 t_1 \Rightarrow b_1 = 2a_2 t_1 \quad (5.146)$$

$$\ddot{\theta}_2(t) = 2b_2 \quad (5.147)$$

додека од условите за t_2 следува:

$$\theta_2(t_2) = b_3(t_2 - t_1)^3 + b_2(t_2 - t_1)^2 + b_1(t_2 - t_1) + b_0 = \theta_2 \quad (5.148)$$

$$\dot{\theta}_2(t_2) = 3b_3(t_2 - t_1)^2 + 2b_2(t_2 - t_1) + b_1 = 0 \quad (5.149)$$

$$\ddot{\theta}_2(t) = 6b_3(t_2 - t_1) + 2b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -3b_3(t_2 - t_1) \quad (5.150)$$

Ако резултатот за b_2 се внесе во равенката (5.149) ќе се добие:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2(t_2) &= 3b_3(t_2 - t_1)^2 + 2b_2(t_2 - t_1) + b_1 = 0 \Rightarrow \\ 3b_3(t_2 - t_1)^2 - 6b_3(t_2 - t_1)^2 + b_1 &= 0 \Rightarrow \\ -3b_3(t_2 - t_1)^2 + b_1 &= 0 \Rightarrow \\ b_1 &= 3b_3(t_2 - t_1)^2 \end{aligned} \quad (5.151)$$

додека со воведување на изразите за b_1 и b_2 во равенката (5.148), се добива:

$$b_3(t_2 - t_1)^3 + b_2(t_2 - t_1)^2 + b_1(t_2 - t_1) + b_0 = \theta_2 \Rightarrow$$

$$b_3(t_2 - t_1)^3 - 3b_3(t_2 - t_1)^3 + 3b_3(t_2 - t_1)^3 + b_0 = \theta_2 \Rightarrow$$

$$b_3(t_2 - t_1)^3 + b_0 = \theta_2 \Rightarrow$$

$$b_0 = \theta_2 - b_3(t_2 - t_1)^3 \quad (5.152)$$

Со спојување на резултатите (5.145) и (5.152), и резултатите (5.146) и (5.151), се добиваат две равенки по непознатите a_2 и b_3 :

$$b_0 = \theta_2 - b_3(t_2 - t_1)^3 = a_2 t_1^2 \quad (5.153)$$

$$b_1 = 3b_3(t_2 - t_1)^2 = 2a_2 t_1 \quad (5.154)$$

чии решенија се:

$$\left. \begin{aligned} \theta_2 - b_3(t_2 - t_1)^3 &= a_2 t_1^2 \quad / \cdot 3 \\ 3b_3(t_2 - t_1)^2 &= 2a_2 t_1 \quad / \cdot (t_2 - t_1) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 3\theta_2 - 3b_3(t_2 - t_1)^3 &= 3a_2 t_1^2 \\ 3b_3(t_2 - t_1)^3 &= 2a_2 t_1(t_2 - t_1) \end{aligned} \right\}$$

$$3\theta_2 - 2a_2 t_1(t_2 - t_1) = 3a_2 t_1^2 \Rightarrow$$

$$a_2 = \frac{3\theta_2}{t_1(t_1 + 2t_2)} \quad (5.155)$$

$$b_3 = \frac{2\theta_2}{(t_1 + 2t_2)(t_2 - t_1)^2} \quad (5.156)$$

Оттука:

$$b_0 = a_2 t_1^2 = \frac{3\theta_2 t_1}{(t_1 + 2t_2)} \quad (5.157)$$

$$b_1 = 2a_2 t_1 = \frac{6\theta_2}{(t_1 + 2t_2)} \quad (5.158)$$

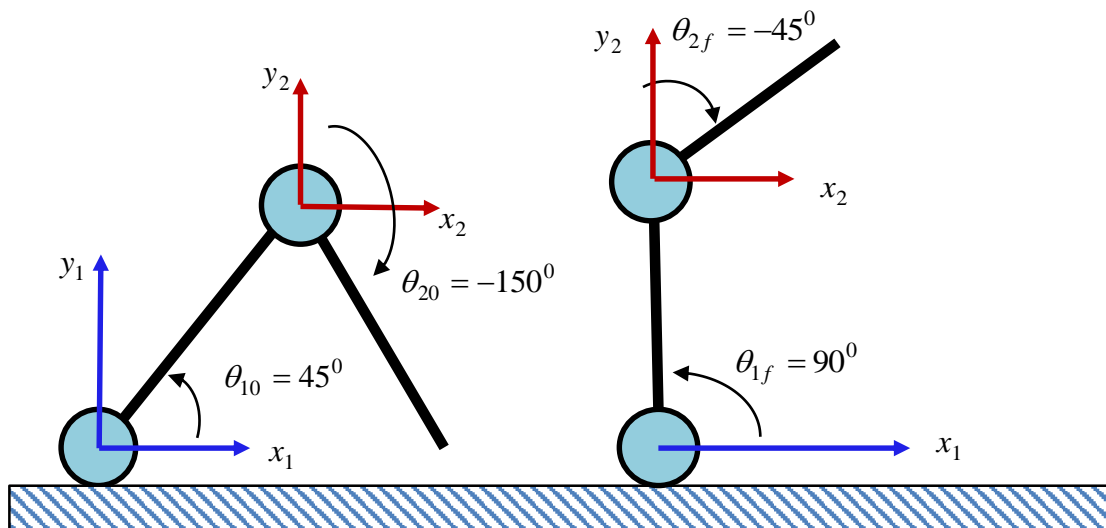
$$b_2 = -3b_3(t_2 - t_1) = \frac{-6\theta_2}{(t_1 + 2t_2)(t_2 - t_1)} \quad (5.159)$$

па, траекториите $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ ќе бидат опишани со следните изрази:

$$\theta_1(t) = \frac{3\theta_2}{t_1(t_1 + 2t_2)} t^2 \quad (5.160)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) = & \frac{2\theta_2}{(t_1 + 2t_2)(t_2 - t_1)^2} (t - t_1)^3 - \frac{6\theta_2}{(t_1 + 2t_2)(t_2 - t_1)} (t - t_1)^2 + \\ & + \frac{6\theta_2}{(t_1 + 2t_2)} (t - t_1) + \frac{3\theta_2 t_1}{(t_1 + 2t_2)} \end{aligned} \quad (5.161)$$

5.12. Дадена е роботската рака со два степени слобода на движење од Слика 5.12. Генерирајте ги траекториите на движење на двата зглоба $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, кои ја поврзуваат прикажаната почетна со прикажаната крајна положба на роботската рака од Слика 5.12. За таа цел да се претпостават линеарни траектории со параболични сегменти. Да се претпостави дека почетната и крајната брзина на зглобовите е нулева, што значи дека поаѓаат од мирување и запираат до потполно мирување. Нека времетраењето на движењето е $t_f = 2 \text{ sec}$, додека времето на забрзување односно успорување е $t_b = 0.5 \text{ sec}$.



Слика 5.12. Илустрација кон Задачата 5.12

Решение: Од Слика 5.12 се гледа дека почетните и крајните гранични услови за положбата на зглобовите се:

$$\theta_{10} = \theta_1(0) = 45^\circ, \quad \theta_{20} = \theta_2(0) = -150^\circ \quad (5.162)$$

$$\theta_{1f} = \theta_1(2) = 90^\circ, \quad \theta_{2f} = \theta_2(2) = -45^\circ, \quad (5.163)$$

Бидејќи:

$$t_b = \frac{\theta_{10} - \theta_{1f} + \omega t_f}{\omega} \quad (5.164)$$

за константната брзина ω_1 на првиот зглоб на линеарниот сегмент се добива:

$$0.5\omega_1 = 45 - 90 + 2\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = 30 \frac{\text{stepeni}}{\text{sec}} \quad (5.165)$$

Од друга страна, неговото забрзување на линеарниот сегмент е:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\omega_1}{t_b} = 60 \frac{\text{stepeni}}{\text{sec}^2} \quad (5.166)$$

На сличен начин за вториот зглоб се добива:

$$0.5\omega_2 = -150 + 45 + 2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 70 \frac{\text{stepeni}}{\text{sec}} \quad (5.167)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\omega_2}{t_b} = 140 \frac{\text{stepeni}}{\text{sec}^2} \quad (5.168)$$

Траекторијата на првиот зглоб на почетниот сегмент е:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(t) = \frac{1}{2}c_1t^2 + b_1t + a_1 \\ \dot{\theta}_1(t) = c_1t + b_1 \\ \ddot{\theta}_1(t) = c_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_1(0) = a_1 = 45 \\ \dot{\theta}_1(0) = b_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_1(0) = c_1 = 60 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_1(t) = 30t^2 + 45 \\ \dot{\theta}_1(t) = 60t \\ \ddot{\theta}_1(t) = 60 \end{array} \right. \Rightarrow \quad (5.169)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(0.5) = 30(0.5)^2 + 45 = 52.5 \\ \dot{\theta}_1(0.5) = 60(0.5) = 30 \\ \ddot{\theta}_1(0.5) = 60 \end{array} \right. \quad (5.170)$$

Аналогно, за траекторијата на вториот зглоб на почетниот сегмент се добива:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2(t) = \frac{1}{2}c_2t^2 + b_2t + a_2 \\ \dot{\theta}_2(t) = c_2t + b_2 \\ \ddot{\theta}_2(t) = c_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_2(0) = a_2 = -150 \\ \dot{\theta}_2(0) = b_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2(0) = c_2 = 140 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_2(t) = 70t^2 - 150 \\ \dot{\theta}_2(t) = 140t \\ \ddot{\theta}_2(t) = 140 \end{array} \right. \Rightarrow \quad (5.171)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2(0.5) = 70(0.5)^2 - 150 = -132.5 \\ \dot{\theta}_2(0.5) = 140(0.5) = 70 \\ \ddot{\theta}_2(0.5) = 140 \end{array} \right. \quad (5.172)$$

Траекториите на двата зглоба на линеарниот сегмент се опишани со равенките:

$$\theta_1(t) = \omega_1(t - t_b) + \theta_{10} + \frac{\omega_1 t_b}{2} = 30t + 37.5 \quad (5.173)$$

$$\theta_2(t) = \omega_2(t - t_b) + \theta_{20} + \frac{\omega_2 t_b}{2} = 70t - 167.5 \quad (5.174)$$

и конечно, за крајниот параболичен сегмент важи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(t) = \theta_{1f} - \frac{\omega_1}{2t_b}(t_f - t)^2 \\ \dot{\theta}_1(t) = \frac{\omega_1}{t_b}(t_f - t) \\ \ddot{\theta}_1(t) = -\frac{\omega_1}{t_b} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_1(t) = 90 - 30(2-t)^2 \\ \dot{\theta}_1(t) = 60(2-t) \\ \ddot{\theta}_1(t) = -60 \end{array} \right. \quad (5.175)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2(t) = \theta_{2f} - \frac{\omega_2}{2t_b}(t_f - t)^2 \\ \dot{\theta}_2(t) = \frac{\omega_2}{t_b}(t_f - t) \\ \ddot{\theta}_2(t) = -\frac{\omega_2}{t_b} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_2(t) = -45 - 70(2-t)^2 \\ \dot{\theta}_2(t) = 140(2-t) \\ \ddot{\theta}_2(t) = -140 \end{array} \right. \quad (5.176)$$

Следствено, бараните траектории се:

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 30t^2 + 45, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 30t + 37.5, & 0.5 \leq t \leq 1.5 \\ 90 - 30(2-t)^2, & 0.5 \leq t \leq 2 \end{cases}, \quad \theta_2(t) = \begin{cases} 70t^2 - 150, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 70t - 167.5, & 0.5 \leq t \leq 1.5 \\ -45 - 70(2-t)^2, & 0.5 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad (5.177)$$

5.13. Роботска рака треба да се помести од зададената почетна положба (1), преку две меѓуточки (2) и (3), до позната крајна положба (4). Движењето, брзината и забрзувањето на тоа движење, кое е претставено со 4-3-4 траекторија, е дефинирано со следните гранични услови:

$$\theta_1 = 20^0, \dot{\theta}_1 = 0, \ddot{\theta}_1 = 0; \quad t_{1i} = 0, \quad t_{1f} = 1$$

$$\theta_2 = 60^0; \quad t_{2i} = 0, \quad t_{2f} = 2$$

$$\theta_3 = 100^0; \quad t_{3i} = 0, \quad t_{3f} = 1$$

$$\theta_4 = 40^0, \dot{\theta}_4 = 0, \ddot{\theta}_4 = 0 \quad (5.178)$$

Да се определи траекторијата на движење на набљудуваната роботска рака и да се прикажат графички кривите на нејзиното движење, брзина и забрзување.

Решение: За одделните сегменти од 4-3-4 траекторијата важи:

прв сегмент – апроксимација на траекторијата со полином од четврти степен

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)}t + a_2^{(1)}t^2 + a_3^{(1)}t^3 + a_4^{(1)}t^4 \\ \dot{\theta}_1(t) &= a_1^{(1)} + 2a_2^{(1)}t + 3a_3^{(1)}t^2 + 4a_4^{(1)}t^3 \\ \ddot{\theta}_1(t) &= 2a_2^{(1)} + 6a_3^{(1)}t + 12a_4^{(1)}t^2\end{aligned}\tag{5.179}$$

втор сегмент – апроксимација на траекторијата со полином од трет степен

$$\begin{aligned}\theta_2(t) &= a_0^{(2)} + a_1^{(2)}t + a_2^{(2)}t^2 + a_3^{(2)}t^3 \\ \dot{\theta}_2(t) &= a_1^{(2)} + 2a_2^{(2)}t + 3a_3^{(2)}t^2 \\ \ddot{\theta}_2(t) &= 2a_2^{(2)} + 6a_3^{(2)}t\end{aligned}\tag{5.180}$$

трет сегмент – апроксимација на траекторијата со полином од четврти степен

$$\begin{aligned}\theta_3(t) &= a_0^{(3)} + a_1^{(3)}t + a_2^{(3)}t^2 + a_3^{(3)}t^3 + a_4^{(3)}t^4 \\ \dot{\theta}_3(t) &= a_1^{(3)} + 2a_2^{(3)}t + 3a_3^{(3)}t^2 + 4a_4^{(3)}t^3 \\ \ddot{\theta}_3(t) &= 2a_2^{(3)} + 6a_3^{(3)}t + 12a_4^{(3)}t^2\end{aligned}\tag{5.181}$$

Од почетните услови за првиот сегмент следува:

$$\begin{aligned}\theta_1(0) &= a_0^{(1)} = 20 \\ \dot{\theta}_1(0) &= a_1^{(1)} = 0 \\ \ddot{\theta}_1(0) &= 2a_2^{(1)} = 0\end{aligned}\tag{5.182}$$

Од почетните услови за вториот сегмент следува:

$$\theta_2(0) = a_0^{(2)} = 60\tag{5.183}$$

Од почетните услови за третиот сегмент следува:

$$\theta_3(0) = a_0^{(3)} = 100\tag{5.184}$$

Останатите коефициенти се добиваат како решенија на матричниот систем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3^{(1)} \\ a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} \\ a_2^{(3)} \\ a_3^{(3)} \\ a_4^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.185)$$

5.14. Првиот зглоб од една роботска рака треба за време од 5sec да се придвижи од почетната положба $\theta(t_i) = \theta_i = 30^0$ во крајната положба $\theta(t_f) = \theta_f = 70^0$, движејќи се притоа со константна брзина од $\omega_1 = 10^0 / \text{sec}$. Да се определи времето на спојување на параболичниот сегмент на почетокот од линеарната траекторија, како и положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од роботот. Променливите на зглобот од роботот да се прикажат графички.

Решение:

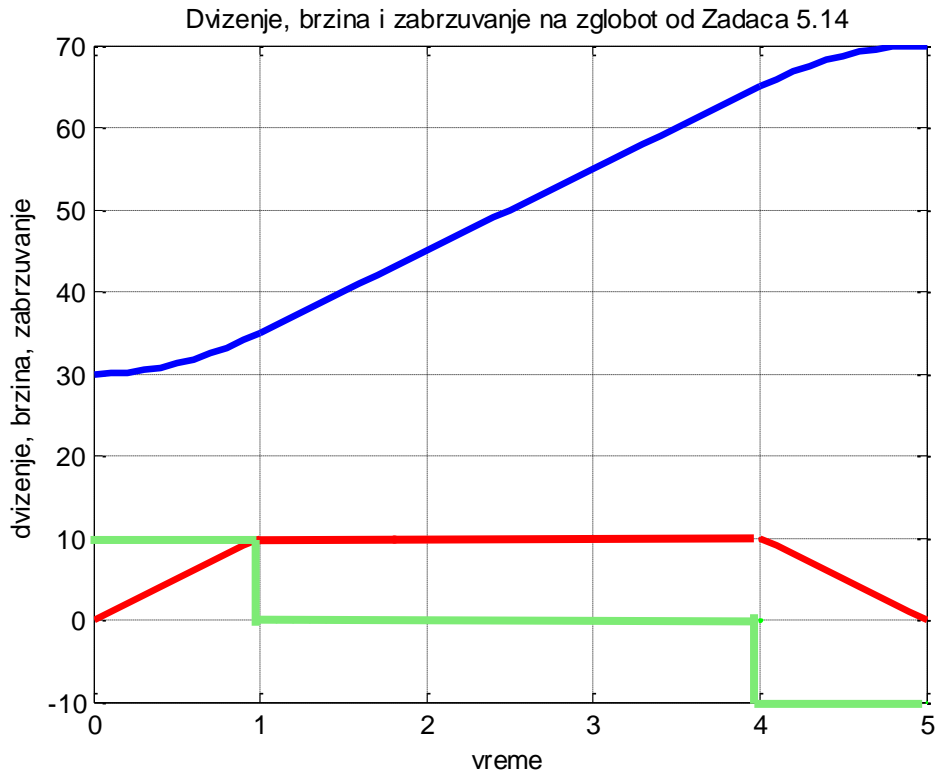
$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega_1 t_f}{\omega_1} = \frac{30 - 70 + 10(5)}{10} = 1 \text{ sec.} \quad (5.186)$$

$$\begin{cases} \theta(t) = 5t^2 + 30 \\ \dot{\theta}(t) = 10t \\ \ddot{\theta}(t) = 10 \end{cases}, \quad \theta_i = 0 \leq \theta \leq 35^0 = \theta_A \quad (5.187)$$

$$\begin{cases} \theta(t) = 10t + 25 \\ \dot{\theta}(t) = 10 \\ \ddot{\theta}(t) = 0 \end{cases}, \quad \theta_A = 35^0 \leq \theta \leq 65^0 = \theta_B \quad (5.188)$$

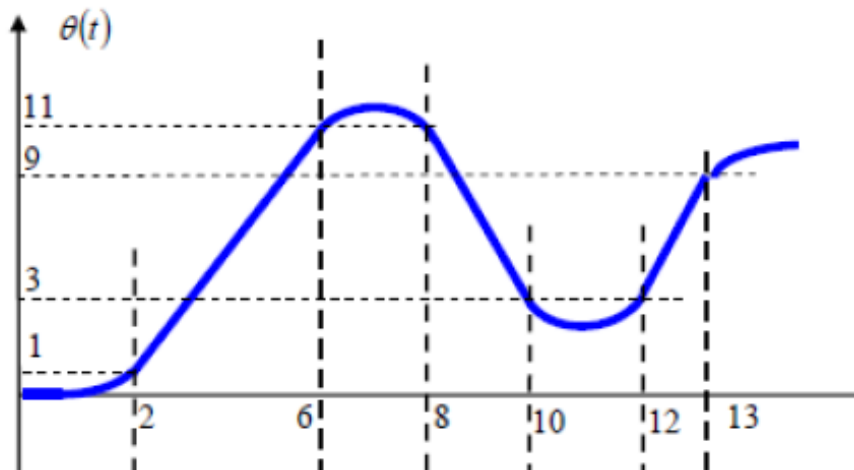
$$\begin{cases} \theta(t) = 70 - 5(5-t)^2 \\ \dot{\theta}(t) = 10(5-t) \\ \ddot{\theta}(t) = -10 \end{cases}, \quad \theta_B = 65^0 \leq \theta \leq 70^0 = \theta_f \quad (5.189)$$

Движењето на анбљудуваниот зглоб е прикажано на Слика 5.13.



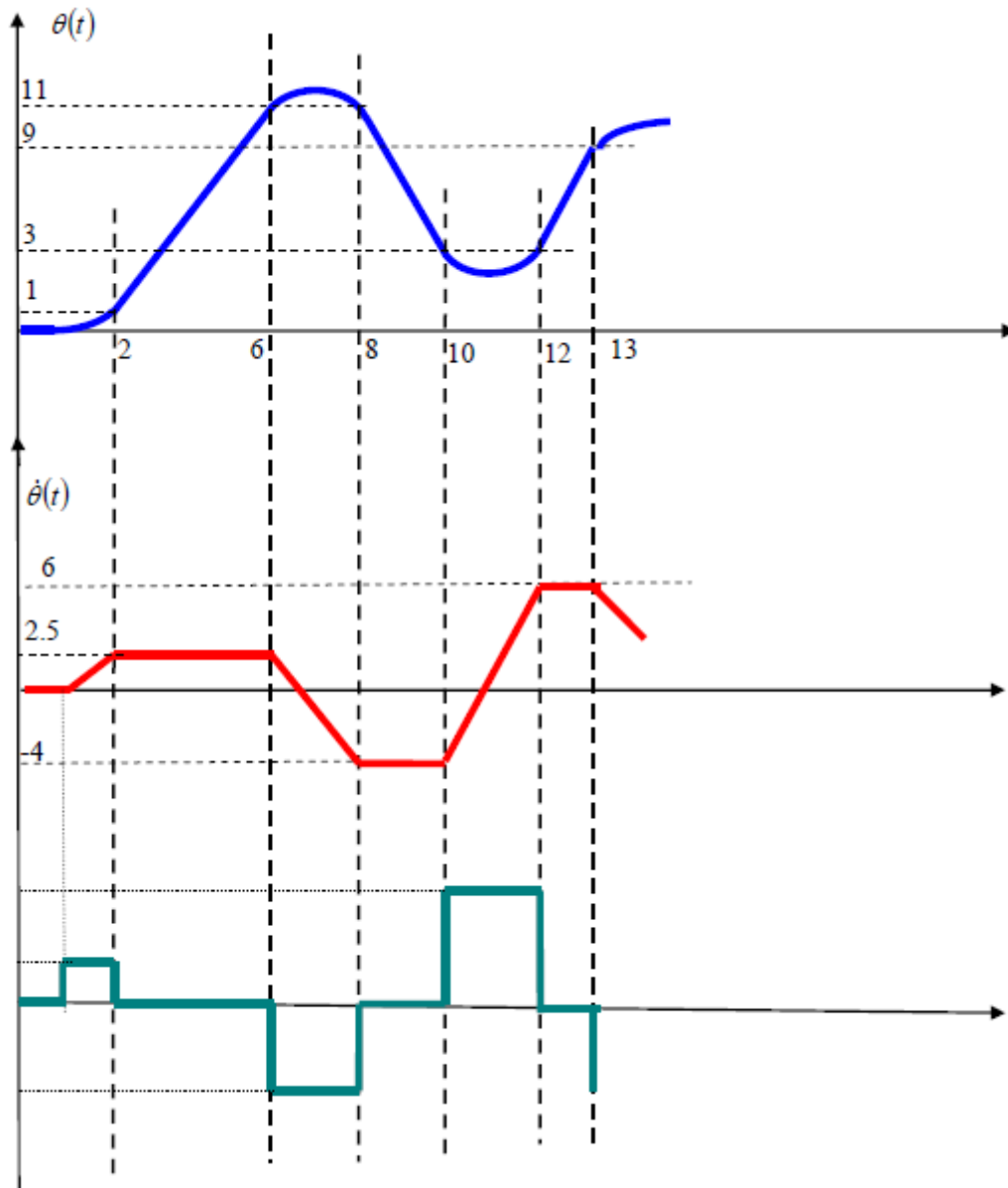
Слика 5.13. Графички приказ на движењето (сина линија), брзината (црвена линија) и забрзувањето (зелена линија) на зглобот од Задача 5.14

5.15. Скицирајте ги графичите на брзината и забрзувањето на еден зглоб од дадена роботска рака, чија траекторија на движење е прикажана на Слика 5.14. Таа се состои од линеарни сегменти поврзани со параболични сегменти.



Слика 5.14. Илустрација кон Задача 5.15

Решение: Бараното решение е прикажано на Слика 5.15.



Слика 5.15. Графички приказ на траекторијата на еден зглоб од Задача 5.16

ЛИТЕРАТУРА

1. Џон Џ. Крег, Вовед во роботика: Механика и контрола, (Трето издание - превод од англиски на македонски јазик*), АД ВЕРБУМ, Скопје, 2010.
2. Saeed B. Niku, Introduction to Robotics: Analysis, Control, Applications, Wiley; 2nd edition, 2010.
3. Colin D. Simpson, Introduction to Robotics, Logic Design Publishing; 1st edition, 2008.
4. Mark W. Spong, Seth Hutchinson, M. Vidyasagar, Robot Modeling and Control, Wiley, 1 edition, 2005.
5. Miomir Vukobratovic, Introduction to Robotics, Springer, 2011.
6. Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, Giuseppe Oriolo, Robotics: Modelling, Planning and Control (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing), Springer, 1st ed., 2009.
7. Reza N. Jazar, Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control, Springer; 2nd ed., 2010.

*) дел од програмата на Владата на Република Македонија за преведување на 500 стручни и научни книги и учебници од кои се учи на врвните, најдобрите и најреномираните универзитети во САД и Европската Унија, организирано од страна на Министерството за информатичко општество

ЛИТЕРАТУРА
