УНИВЕРЗИТЕТ „СВЕТИ КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ - СКОПЈЕ
Природно-математички факултет

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКА (ЗА СТУДЕНТИТЕ НА БИОЛОГИЈА)

Скопје, 2023

Весна Манова-Ераковиќ, Абдула Букла

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ, Природно-математички факултет – Скопје

Рецензенти:
1. проф. д-р Валентина Миовска
2. проф. д-р Ѓорѓи Маркоски

Техничка обработка:
доц. д-р Абдула Букла

Лектура на македонски јазик:
Виолета Јовановска-Никовска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.8)(076)

Манова-Ераковиќ, Весна
Збирка решени задачи по математика [Електронски извор] : (за студентите на биологија) / Весна Манова-Ераковиќ, Абдула Букла. - Скопје
: Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Природно-математички факултет, 2023

Начин на пристапување (URL):
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41. - Текст во PDF формат, содржи 106 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 30.01.2023. - Библиографија: стр. 106

ISBN 978-9989-43-483-9

1. Букла, Абдула [автор]
а) Математика -- Високошколски учебници -- Вежби

COBISS.MK-ID 59254789

ПРЕДГОВОР

Оваа збирка, пред сè е наменета за студентите на предметот Математика со биостатистика, на Институтот за биологија при Природно-математичкиот факултет во Скопје.

Меѓутоа, збирката може да ја користитат и студентите од техничките факултети, како и сите оние студенти во чии наставни програми се опфатени содржините што се обработуваат во оваа збирка.

Збирката е резултат на повеќегодишни предавања и вежби кои ги одржувале авторите на студиите по биологија и на студиите каде што се предава овој материјал.

Збирката е работена според наставната програма за овој предмет и ги следи двата електронски објавени учебника за истиот предмет.

Опфатени се темите: Пропорционалност на величини, Принцип на математичка индукција, Биномна формула, Низи од реални броеви, Апсолутна вредност, Функции од реална променлива, Извод на функција од реална променлива, Елементи од комбинаторика, веројатност и биостатистика.

Во сите глави се дадени и основните поими потребни за решавање на задачите, а по потреба, се користени и цртежи за подобра илустрација.

Низ збирката, посебно внимание е посветено на задачи со примена кои се сретнуваат во природата, особено во биологијата.

Збирката е напишана на стручен, но истовремено едноставен и разбирлив начин. Се потрудивме стилот на пишување да биде прикладен како за студентите, така и за останатите читатели кои ќе ја користат во својата професионална работа.

Особено им се заблагодаруваме на рецензентите на оваа збирка, кои со своите коментари и забелешки многу придонесоа за нејзино подобрување.

Ќе бидеме благодарни на сите читатели кои со своите сугестии ќе придонесат за идни подобрувања на оваа збирка.

На сите читатели им посакуваме успешно навлегување во техниките на математиката преку оваа збирка и успешно совладување на нејзините содржини.

Скопје, 2023 Од Авторите

1. Пропорционалност на величините

1.1. Процент

Во секојдневниот живот често се среќаваме со поимот процент.

1 процент, со ознака 1 %, претставува дропка со броител 1 и именител 100, па 1 % од некоја големина *A* е стоти дел од таа големина, т.е. 1 % од *A* е $1\% \cdot A = \frac{1}{100} \cdot A = \frac{A}{100}$. Општо, *p* % од *A* е $p\% \cdot A = p \cdot \frac{1}{100} \cdot A = \frac{p \cdot A}{100}$.

На пример,

$$1\% = \frac{1}{100} = 0.01, \quad 20\% = 20 \cdot \frac{1}{100} = \frac{20}{100} = 0.2, \; 80\% = \frac{80}{100} = 0.8,$$

$$1\% \text{ од 5000 е } \frac{1}{100} \cdot 5000 = 50, \quad 80\% \text{ од 5000 е } 80 \cdot \frac{1}{100} \cdot 5000 = 4000.$$

Секој број, запишувајќи го како дропка со именител 100, може да се запише во облик на процент. На пример,

$$1 = \frac{100}{100} = 100 \cdot \frac{1}{100} = 100\%, \; 2 = \frac{200}{100} = 200 \cdot \frac{1}{100} = 200\%, \; 0.25 = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25 \cdot \frac{1}{100} = 25\%.$$

За произволен реален број a,

$$a = a \cdot \frac{100}{100} = a \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} = a \cdot 100\%..$$

Процентот често се користи кога сакаме да одредиме со колкав дел учествува определено подмножество од дадено множество во истото, и во тој случај го изразуваме во проценти бројот на елементите од подмножеството во однос на бројот на елементите од целото множество. Во ваков случај важи формулата:

$$\frac{дел}{цело} \cdot 100\% = p\%.$$

На пример, од 2500 цветови, 900 се бели. Процентот на бели цветови во однос на вкупниот број е $\frac{900}{2500} \cdot 100\% = 36\%$.

Задача 1. Во едно домаќинство во текот на една седмица, се трошат 1000 денари за купување овошје, 1000 денари за зеленчук, а за купување на останатите прехранбени производи се трошат 2000 денари. Прехранбените производи кои ги купува домаќинството поевтиниле за 1 %, овошјето поевтинило за 10 %, а зеленчукот поевтинел за 12 %. Колку проценти од вкупните трошоци изнесуваат трошоците за прехранбените производи, без овошјето и зеленчукот, по поевтинувањето?

Решение. По поевтинувањето, домаќинството троши: 1000 – 10 % од 1000 денари за овошје, односно $1000 \cdot 100\% - 10\% \cdot 1000 = (100-10)\% \cdot 1000 = 90\% \cdot 1000 = \frac{90 \cdot 1000}{100} = 900$ т.е. 900 денари за овошје. Слично, за зеленчук троши (100 – 12) % од 1000 денари односно 88 % од 1000 денари, т.е. 880 денари. За прехранбените производи кои ги купува, по поевтинувањето, троши 99 % од 2000 денари, односно 1980 денари. По поевтинувањето, за една седмица домаќинството троши вкупно 1980 + 880 + 900 = 3760 денари. Значи, по поевтинувањето, трошоците за прехранбените производи, без овошјето и зеленчукот, во однос на вкупните трошоци, изразено во проценти е $\frac{1980}{3760} \cdot 100\% = \frac{19800}{376}\%$, што приближно изнесува околу 53 %.

Задача 2. Три катедри на еден институт дале барање за купување дополнителна опрема за лабораториите. Вредноста на опремата во барањето на првата катедра чини 45 % од вредноста на опремата од барањето на втората катедра, а вредноста на опремата од барањето на втората катедра е 80 % од барањето на третата катедра. Вредноста на опремата од барањето на третата катедра ја преминува вредноста на опремата од барањето на првата катедра за 640 евра. Колкава е вкупната вредност на опремата во барањата на сите три катедри?

Решение. Да ги означиме вредностите на опремата од барањата на првата, втората и третата катедра со x, y и $z,$ соодветно. Тогаш ги имаме следниве врски:

$$x = 45\% \cdot y,\ y = 80\% \cdot z,\ z = x + 640.$$

Со замена на y од втората равенка во првата, добиваме $x = 45\% \cdot 80\% z$. Добиениот израз за x го заменуваме во третата равенка, па имаме

$z = 45\% \cdot 80\% z + 640$, односно:

$$z = \frac{45}{100} \cdot \frac{80}{100} z + 640 \Leftrightarrow z\left(1 - \frac{45}{100} \cdot \frac{80}{100}\right) = 640 \Leftrightarrow z\left(1 - \frac{9}{20} \cdot \frac{4}{5}\right) = 640$$
$$\Leftrightarrow z\left(1 - \frac{36}{100}\right) = 640 \Leftrightarrow z \cdot \frac{64}{100} = 640 \Leftrightarrow z = \frac{640 \cdot 100}{64} = 1000.$$

Од втората равенка, за $z = 1000$, добиваме $y = 80\% \cdot 1000 = \frac{80}{100} \cdot 1000 = 80 \cdot 10 = 800.$

Конечно, за барањето од првата катедра добиваме $x = 45\% \cdot 800 = \frac{45}{100} \cdot 800 = 45 \cdot 8 = 360.$

Вкупната вредност на опремата за сите три барања изнесува 360 + 800 + 1000 = 2160 евра.

Задача 3. Млеко што има 5 % маснотии се меша со млеко што има 2 % маснотии. Колку литри од секое млеко е потребно за да се добијат 60 литри млеко со 3 % маснотии?

Решение. Да претпоставиме дека од млекото со 5 % маснотии се потребни x литри, а од млекото со 2 % маснотии се потребни y литри. Тогаш, од условот на задачата имаме дека:

$$x+y=60 \text{ и } 5\%\cdot x+2\%\cdot y=3\%\cdot 60$$

т.е. имаме

$$x+y=60 \text{ и } \frac{5}{100}\cdot x+\frac{2}{100}\cdot y=\frac{3}{100}\cdot 60$$

Множејќи ја втората равенка со 100, таа го добива обликот $5x+2y=180$.

Двете равенки го даваат системот $\begin{cases} x+y=60 \\ 5x+2y=180 \end{cases}$. За решението на системот имаме:

$$\begin{cases} x+y=60 \\ 5x+2y=180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=60-y \\ 5(60-y)+2y=180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=60-y \\ 300-3y=180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=60-y \\ y=\dfrac{120}{3}=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=60-40=20 \\ y=40 \end{cases}$$

Значи, за да се добијат 60 литри млеко со 3 % маснотии, треба да се измешаат 20 литри млеко со 5 % маснотии и 40 литри млеко со 2 % маснотии.

Задача 4. 350 грама шеќер треба да се растворат во 800 грама вода. Колку процентен раствор се добива?

Решение. Вкупното количество вода и шеќер е 1150 грама, па според тоа се добива $\frac{350}{1150}\cdot 100\% \approx 30.4\%$ раствор.

Забелешка. Оваа задача сугерира формула според која се пресметува процентот p на раствор добиен со растворање на a грама чиста материја со A грама растворувач:

$$p=\frac{a}{a+A}\cdot 100.$$

Задача 5. Колку процентен воден раствор на NaCl се добива со мешање на 250 милилитри 15 % воден раствор NaCl и 450 милилитри 10 % воден раствор на истото соединение?

Решение. Користејќи ја формулата $\frac{дел}{цело}\cdot 100\% = p\%$, добиваме дека во 250 милилитри на 15 % воден раствор на NaCl има $\frac{15}{100}\cdot 250 = 37.5$ милилитри чиста NaCl. Слично, во 450 милилитри 10 % воден раствор на NaCl има $\frac{10}{100}\cdot 450 = 45$ милилитри чиста NaCl. Со мешање на овие два раствора се добиваат 700 милилитри нов $p\%$ раствор на NaCl. Притоа, p се пресметува на следниов начин:

$$p = \frac{\frac{15}{100}\cdot 250 + \frac{10}{100}\cdot 450}{250+450}\cdot 100 = \frac{37.5+45}{700}\cdot 100 = 11.8.$$

Забелешка 1. Оваа задача сугерира формула според која се пресметува процентот p на раствор добиен со мешање на два раствора, и тоа, A_1 милилитри $p_1\%$ воден раствор со A_2 милилитри $p_2\%$ воден раствор на некое соединение:

$$p = \frac{\frac{A_1\cdot p_1}{100} + \frac{A_2\cdot p_2}{100}}{A_1 + A_2}\cdot 100.$$

Забелешка 2. Оваа формула може да се обопшти за произволен конечен број на раствори.

$$p = \frac{\frac{A_1\cdot p_1}{100} + \frac{A_2\cdot p_2}{100} + \ldots + \frac{A_n\cdot p_n}{100}}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}\cdot 100.$$

Следната задача се однесува на засилување на дадено количество (A грама) $p\%$ воден раствор на некое соединение до $q\%$ воден раствор на истото соединение. Притоа $q > p$.

Задача 6. 750 милилитри 27 % воден раствор на NaCl треба да се засили до 40 % раствор. Колку грама чиста сол, NaCl, треба да се додаде?

Решение. Со x да го означиме количеството чиста сол што треба да се додаде. Во 750 милилитри 27 % воден раствор, има $\frac{750\cdot 27}{100}$ грама чиста сол. Вкупното количество на чиста сол во новодобиениот раствор (чие количество сега изнесува $750+x$), е $x+\frac{750\cdot 27}{100}$ грама. Треба да се добие 40 % раствор, па според тоа, ја имаме следнава равенка:

$$\frac{x+\frac{750\cdot 27}{100}}{750+x}\cdot 100\% = 40\%.$$

Да го определиме x од дадената равенка:

$$\frac{x+\frac{750\cdot 27}{100}}{750+x}\cdot 100=40 \Leftrightarrow \frac{100x+750\cdot 27}{750+x}=40 \Leftrightarrow 100x+750\cdot 27=40(750+x)$$

$$\Leftrightarrow 100x+750\cdot 27=750\cdot 40+40x \Leftrightarrow (100-40)x=750(40-27) \Leftrightarrow x=\frac{750(40-27)}{100-40}.$$

Заклучуваме дека треба да се додаде $x=162.5$ грама чиста сол.

Забелешка. Во општ случај, за да засилиме *A* количество на *p* процентен даден раствор до *q* процентен раствор на истото соединение, треба да додадеме *x* количество од истото соединение со поставување на следната равенка:

$$\frac{x+\frac{A\cdot p}{100}}{A+x}\cdot 100\%=q\%\text{, чие решение е } x=\frac{A(q-p)}{100-q}.$$

Ќе ја разгледаме и задачата за разблажување на дадено количество (A грама) $p\%$ воден раствор на некое соединение до $q\%$ воден раствор на истото соединение. Притоа $q<p$.

Задача 7. 1 литар 56 % воден раствор на NaCl треба да се разблажи до 30 %. Колку литри вода треба да се додаде?

Решение. Со x да го означиме количеството чиста вода што треба да се додаде. Во 1 литар (=1000 милилитри), 56 % воден раствор, има $\frac{1000\cdot 56}{100}$ грама чиста сол. Вкупното количество чиста сол во новодобиениот раствор (чие количество сега изнесува $1000+x$), останува исто. Треба да добиеме 30 % раствор, па според тоа, ја составуваме следнава равенка:

$$\frac{\frac{1000\cdot 56}{100}}{1000+x}\cdot 100\%=30\%.$$

Со нејзино решавање, добиваме дека $x=\frac{1000\cdot(56-30)}{30}=866.7$ милилитри.

Забелешка. Во општ случај, за да разблажиме *A* количество на *p* процентен даден раствор до *q* процентен раствор на истото соединение, треба да додадеме *x* количество од растворувачот со поставување на следната равенка:

$$\frac{\frac{A\cdot p}{100}}{A+x}\cdot 100\%=q\%\text{, чие решение е } x=\frac{A\cdot(p-q)}{q}.$$

1.2. Пропорција. Просто и сложено тројно правило

Еднаквост на два односи се нарекува пропорција. Односите $a:b$ и $c:d$ што имаат еднакви вредности, т.е. $a:b=k$ и $c:d=k$ ја образуваат пропорцијата $a:b=c:d$, т.е. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Се чита „a спрема b се однесува како c спрема d“. Изразите a,b,c,d се викаат членови на пропорцијата, при што a,d се надворешни членови а b,c се викаат внатрешни членови. Вредноста k се вика коефициент на пропорционалност.

Својство 1. Во пропорцијата $a:b=c:d$ производот од надворешните членови е еднаков на производот на внатрешни членови, т.е. $a\cdot d=b\cdot c$.

Ако три (или повеќе) односи, на пример $a:a_1, b:b_1, c:c_1$ се еднакви, т.е. $a:a_1=b:b_1=c:c_1$, тогаш тие можат да се запишат во вид на продолжена пропорција $a:b:c=a_1:b_1:c_1$, во којашто a,b,c се први членови, а a_1,b_1,c_1 се втори членови.

Својство 2. Ако $a:a_1=b:b_1=c:c_1=k$, тогаш $\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}=k$.

Задача 1. Едно земјоделско стопанство на три места има вкупно 12.6 хектари ливади. Плоштините на овие ливади се однесуваат како $2.4:3.2:2.8$. По колку хектари ливади има земјоделското стопанство на трите места?

Решение. Нека со A,B,C ги означиме плоштините на ливадите, соодветно. Нека продолжената пропорција $A:B:C=2.4:3.2:2.8$ има коефициент на пропорционалност k. Тогаш, $A:2.4=B:3.2=C:2.8=k$, т.е. $A=2.4k, B=3.2k, C=2.8k$. Од друга страна, од условот на задачата, имаме $A+B+C=12.6$, па заменувајќи ги горните вредности за A,B,C добиваме $2.4k+3.2k+2.8k=12.6$, т.е. $8.4k=12.6$, па $k=1.5$. Според тоа, $A=2.4\cdot 1.5=3.6$, $B=3.2\cdot 1.5=4.8$, $C=2.8\cdot 1.5=4.2$ хектари.

Задача 2. Сточна храна се подготвува во следниот сооднос: 1 kg концентрат, 3 kg разни зрна и 5 kg вода. Колку од компонентите треба да се земат за 1.5 тони дневна храна? Односот да се искаже во проценти.

Решение. Да претпоставиме дека 1.5 тони = 1500 kg дневна храна се состои од x kg концентрат, y kg разни зрна и z kg вода, т.е. $x+y+z=1500$, додека количеството на основните компоненти е $1+3+5=9$ kg. Станува збор за продолжената пропорција $x:y:z=1:3:5=k$. Од Својствоto 2 имаме дека $\frac{x+y+z}{1+3+5}=\frac{1500}{9}=k$, т.е. $k=166.7$. Од друга страна, $x=k, y=3k, z=5k$, од каде што добиваме дека подготовка на 1,5 тони дневна сточна храна се потребни $x=166.7$ kg концентрат, $y=500$ kg разни зрна, $z=833.3$ kg вода.

Секоја од компонентите, концентрат, разни зрна и вода, во однос на вкупното количество од 1,5 тони дневна сточна храна, изразено во проценти, учествува со $\frac{166.7}{1500}=11.1\%, \frac{500}{1500}=33.3\%, \frac{833.3}{1500}=55.6\%,$ соодветно.

Две величини A и B се правопропорционални ако односот на кои било нивни соодветни вредности т.е. $a \in A$ и $b \in B$ е константен број, т.е. $a:b=k$. Бројот k се нарекува коефициент на права пропорционалност.

Две величини A и B се обратнопропорционални ако производот на кои било нивни соодветни вредности т.е. $a \in A$ и $b \in B$ е константен број, т.е. $a \cdot b = k$. Бројот k се нарекува коефициент на обратна пропорционалност.

При решавање задачи кај кои величините се во правопропорционална или обратнопропорционална зависност се применува постапката позната како тројно правило.

Во следните примери ќе воведеме шема (табела) така што во првиот ред ги запишуваме познатите вредности, а во вториот ред ги запишуваме непознатата и преостанатата позната вредност, притоа водејќи сметка именуваните броеви од ист вид да се еден под друг.

Задача 3. Од 100 kg жито се добиваат 90 kg брашно. Колку жито треба да се сомеле за да се добијат 675 kg брашно?

Решение.

100 kg жито	$\uparrow$	90 kg брашно	$\uparrow$
x kg жито		675 kg брашно	

$$x:100=675:90$$

$$x=\frac{100 \cdot 675}{90}=750kg\,.$$

Задача 4. За да се ожнее едно поле со пченица потребни се 6 комбајни, од кои секој жнее по 4 часа. Со колку комбајни ќе се ожнее полето ако секој од нив жнее по 8 часа?

Решение.

6 комбајни	$\uparrow$	4 часа	$\downarrow$
x комбајни		8 часа	

$$x:6=4:8$$

$$x=\frac{6 \cdot 4}{8}=3 \quad \text{комбајни.}$$

Задача 5. Месечната сметка за струја изнесува 70 денари за 5 светилки, кои светат по 7 часа дневно. Колкава ќе биде сметката, ако 11 светилки светат по 9 часа дневно?

Решение.

5 светилки	↑	7 часа	↑	70 денари	↑
11 светилки		9 часа		x денари	

$$x:70=(11\cdot 9):(5\cdot 7)$$

$$x=70\cdot\frac{11\cdot 9}{5\cdot 7}=198\,\text{денари.}$$

Задача 6. 30 работника можат да ископаат канал долг 15 метри, широк 4 метри и длабок 6 метри, за време од 48 дена, работејќи по 8 часа на ден. За колку дена 36 работника ќе ископаат канал долг 16 метри, широк 5 метри и длабок 4.5 метри, работејќи по 10 часа на ден?

Решение.

30 раб.	↓	15 м.д.	↑	4 м.ш.	↑	6 м.дб.	↑	8 часа	↓	48 дена	↑
36 раб		16 м.д.		5 м.ш.		4.5 м.дб.		10 часа		x дена	

$$x:48=(8\cdot 4.5\cdot 5\cdot 16\cdot 30):(10\cdot 6\cdot 4\cdot 15\cdot 36)$$

$$x=48\cdot\frac{8\cdot 4.5\cdot 5\cdot 16\cdot 30}{10\cdot 6\cdot 4\cdot 15\cdot 36}=32\,\text{дена.}$$

2. Принцип на математичка индукција

Принципот на математичка индукција се состои од следните две проверки:

1. Докажуваме дека својството $P(n)$ важи за бројот $n=1,$ т.е. важи $P(1)$;

2. Претпоставувајќи дека својството $P(n)$ важи за природниот број $n=k\in\mathbb{N},$ т.е дека е точно $P(k)$, докажуваме дека својството важи и за неговиот следбеник $n=k+1\in\mathbb{N}$, т.е. важи $P(k+1)$.

Тогаш заклучуваме дека својсвото $P(n)$ е точно за секој $n \in \mathbb{N}$.

Задача 1. Со принцип на математичка индукција, да се докаже дека:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Решение.

Нека со $P(n)$, за $n \in \mathbb{N}$, го означиме равенството што треба да се докаже, односно $P(n): 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Со $L(n)$ го означуваме левиот дел од $P(n)$, т.е. $L(n)=1+2+3+...+n$, а со $D(n)$ десниот дел од $P(n)$, т.е $D(n)=\frac{n(n+1)}{2}$. Значи $P(n): L(n)=D(n)$.

1. Во првиот чекор проверуваме дали тврдењето важи за $n=1$.

За $n=1$, за левиот дел од равенството, $L(1)$ и за десниот дел, $D(1)$ имаме

$$L(1)=1 \text{ и } D(1)=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{ па } L(1)=D(1), \text{ односно важи } P(1).$$

2. Да претпоставиме дека важи $P(k)$, т.е. дека е точно равенството $L(k)=D(k)$, за $n=k$, односно важи

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Ќе докажеме дека тврдењето важи и за $n=k+1$. За $n=k+1$, левиот дел на равенството е $L(k+1)=1+2+3+...+k+(k+1)$, а десниот е $D(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, па треба да докажеме дека важи $L(k+1)=D(k+1)$, односно

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Користејќи ја претпоставката за $P(k)$, имаме

$$\begin{aligned}L(k+1)&=1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=D(k+1).\end{aligned}$$

Користејќи дека е точно $P(k)$, докажавме дека важи $L(k+1)=D(k+1)$, т.е. е точно $P(k+1)$.

Согласно принципот на математичка индукција следува дека е точно $P(n)$, за секој $n\in\mathbb{N}$, што требаше и да се докаже.

Задача 2. Да се докаже дека важи: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека за $n\in\mathbb{N}$,

$$P(n): 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,\ L(n)=1^3+2^3+3^3+...+n^3, \text{ а } D(n)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

1. За $n=1$ имаме $L(1)=1^3=1$, $D(1)=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1^2=1$ па $L(1)=D(1)$.

2. Да претпоставиме дека за $n=k$ важи $P(k)$, односно $L(k)=D(k)$ т.е.

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2.$$

За $n=k+1$, имаме

$$L(k+1)=1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3,$$

$$D(k+1)=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Користејќи ја претпоставката дека е точно $P(k)$, добиваме

$$\begin{aligned}L(k+1)&=1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\&=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=(k+1)^2\frac{(k+2)^2}{4}=D(k+1).\end{aligned}$$

Согласно принципот на математичка индукција даденото равенство е точно за сите природни броеви.

Задача 3. Да се докаже дека важи: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$

.

Решение. Нека за $n\in\mathbb{N}$,

$P(n): \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1},\ L(n)=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$, а $D(n)=\dfrac{n}{n+1}.$

1. За $n=1$ имаме $L(1)=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$, $D(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2},$ па важи $L(1)=D(1)$, односно докажавме дека е точно $P(1)$.

2. Да претпоставиме дека за $n=k$ е точно $P(k),$ односно $L(k)=D(k)$ т.е.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

За $n=k+1$ имаме,

$$\begin{aligned}L(k+1)&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot\left[(k+1)+1\right]}\\&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)},\end{aligned}$$

$$D(k+1)=\frac{k+1}{(k+1)+1}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Користејќи ја претпоставката дека е точно $P(k)$, добиваме

$$\begin{aligned}L(k+1)&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}\\&=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)}\\&=\frac{(k+1)^2}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=D(k+1),\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

Задача 4. Со принцип на математичка индукција, да се докаже дека $4\,\middle|\,\left(5^n-1\right)$ за сите $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека за $n\in\mathbb{N},\quad P(n): 4\,\big|\,\left(5^n-1\right).$

1. За $n=1$, изразот $5^1-1=4$ е делив со 4 т.е. $4\,\big|\,\left(5^1-1\right)$, па е точно $P(1)$.

2. Да претпоставиме дека за $n=k$ важи $P(k)$ односно $4\left|\left(5^k-1\right)\right.$ т.е.

постои $m\in\mathbb{Z}$ така што $5^k-1=4m.$

Треба да докажеме дека важи $P(k+1): 4\left|\left(5^{k+1}-1\right)\right.$. Користејќи ја претпоставката дека е точно $P(k)$, добиваме

$$5^{k+1}-1=5\cdot 5^k-1=5\cdot(4m+1)-1=5\cdot 4m+5-1=5\cdot 4m+4=4(5m+1),$$

односно дека $5^{k+1}-1$ е делив со 4.

Задача 5. Да се докаже дека $17\left|\left(2^{3n+1}+3\cdot 5^{2n+1}\right)\right.$.

Решение. Нека за $n\in\mathbb{N},\quad P(n): 17\left|\left(2^{3n+1}+3\cdot 5^{2n+1}\right)\right.$

1. За $n=1$ изразот $2^{3\cdot 1+1}+3\cdot 5^{2\cdot 1+1}=2^4+3\cdot 5^3=16+3\cdot 125=391=17\cdot 23$ е делив со 17 т.е. $17\left|\left(2^{3\cdot 1+1}+3\cdot 5^{2\cdot 1+1}\right)\right.$, па е точно $P(1)$.

2. Да претпоставиме дека за $n=k$ важи $P(k)$ односно $17\left|\left(2^{3k+1}+3\cdot 5^{2k+1}\right)\right.$ т.е.

постои цел број m таков што $2^{3k+1}+3\cdot 5^{2k+1}=17m$.

За $n=k+1$, $2^{3n+1}+3\cdot 5^{2n+1}=2^{3(k+1)+1}+3\cdot 5^{2(k+1)+1}=2^{3k+3+1}+3\cdot 5^{2k+2+1}=2^3\cdot 2^{3k+1}+3\cdot 5^2\cdot 5^{2k+1}$, па треба да докажеме дека важи $P(k+1): 17\left|\left(2^{3n+1}+3\cdot 5^{2n+1}\right)\right.$, односно дека е точно $P(k+1): 17\left|\left(2^3\cdot 2^{3k+1}+3\cdot 5^2\cdot 5^{2k+1}\right)\right.$. Користејќи ја претпоставката дека е точно $P(k)$, односно дека $2^{3k+1}=17m-3\cdot 5^{2k+1}$, добиваме

$$\begin{aligned}2^3\cdot 2^{3k+1}+3\cdot 5^2\cdot 5^{2k+1}&=8\cdot\left(17m-3\cdot 5^{2k+1}\right)+75\cdot 5^{2k+1}\\&=8\cdot 17m-24\cdot 5^{2k+1}+75\cdot 5^{2k+1}\\&=8\cdot 17m+51\cdot 5^{2k+1}=17\left(8m+3\cdot 5^{2k+1}\right).\end{aligned}$$

Бидејќи $8m+3\cdot 5^{2k+1}$ е цел број, имаме дека $17\left|\left(2^3\cdot 2^{3k+1}+3\cdot 5^2\cdot 5^{2k+1}\right)\right.$.

Задача 6. Да се определи кој е првиот природен број за кој важи неравенството $3^n>4n+1$, а потоа и да се докаже дека неравенството важи за сите природни броеви поголеми од него.

Решение. Проверувајќи ја точноста на даденото неравенство од бројот 1, па натаму, ќе определиме кој е првиот природен број за кој е исполнето неравенството.

Потоа со принципот на математичка индукција ќе докажеме дека неравенството важи и за сите наредни природни броеви.

За $n=1$: $3^1=3,\ 4\cdot 1+1=5$ од каде следува дека $3^1<4\cdot 1+1$.

За $n=2$: $3^2=9,\ 4\cdot 2+1=9$ од каде следува дека $3^2=4\cdot 2+1$.

За $n=3$: $3^3=27,\ 4\cdot 3+1=13$ од каде следува дека $3^3>4\cdot 3+1$.

1. Докажеме дека за $n=3$ тврдењето е исполнето.

2. Да претпоставиме дека за $n=k$ важи $3^k>4k+1$.

Треба да докажеме дека неравенството важи за $n=k+1$, односно треба да докажеме дека $3^{k+1}>4(k+1)+1$ т.е. $3\cdot 3^k>4k+1+4$. Ако неравенството $3^k>4k+1$ го помножиме со 3 добиваме $3\cdot 3^k>3\cdot(4k+1)$. За да го завршиме доказот, доволно е да докажеме дека $3\cdot(4k+1)\geq 4k+1+4$ т.е. $12k+3\geq 4k+5$ т.е. $12k-4k\geq 5-3$ т.е. $8k\geq 2$. Последното неравенство важи за сите $k\geq\dfrac{2}{8}$, па значи важи за сите природни броеви k т.е. важи и $3\cdot(4k+1)\geq 4k+1+4$, што требаше да се докаже.

3. Биномна формула

За $n\in\mathbb{N}$, $a,b\in\mathbb{R}$, важи биномната формула:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^{n-(n-1)}b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n,$$

каде $\binom{n}{k}$ е биномниот коефициент на $(k+1)$-от член и се пресметува со формулата $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Притоа, $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $0!=1$, и $(k+1)$-от член во развојот на биномот $(a+b)^n$ се означува со $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Важат следните својства:

- $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

- $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Задача 1. Да се развие биномот: а) $(2a+3b)^4$; б) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$.

Решение.

а) Користејќи ја биномната формула добиваме:

$$\begin{aligned}(2a+3b)^4&=\binom{4}{0}(2a)^4+\binom{4}{1}(2a)^{4-1}(3b)+\binom{4}{2}(2a)^{4-2}(3b)^2+\binom{4}{3}(2a)^{4-3}(3b)^3+\binom{4}{4}(2a)^{4-4}(3b)^4\\&=\binom{4}{0}(2a)^4+\binom{4}{1}(2a)^3(3b)+\binom{4}{2}(2a)^2(3b)^2+\binom{4}{3}(2a)(3b)^3+\binom{4}{4}(3b)^4\\&=\binom{4}{0}16a^4+\binom{4}{1}8a^3(3b)+\binom{4}{2}4a^2 9b^2+\binom{4}{3}(2a)27b^3+\binom{4}{4}81b^4\\&=\binom{4}{0}16a^4+\binom{4}{1}24a^3b+\binom{4}{2}36a^2b^2+\binom{4}{3}54ab^3+\binom{4}{4}81b^4.\end{aligned}$$

Од $\binom{4}{0}=\binom{4}{4}=1,\binom{4}{1}=\binom{4}{3}=4,\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}=6$ имаме

$$\begin{aligned}(2a+3b)^4&=1\cdot 16a^4+4\cdot 24a^3b+6\cdot 36a^2b^2+4\cdot 54ab^3+1\cdot 81b^4\\&=16a^4+96a^3b+216a^2b^2+216ab^3+81b^4.\end{aligned}$$

б) Од биномната формула имаме:

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3&=\left(x+\left(-\frac{1}{x}\right)\right)^3\\&=\binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^{3-1}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^1+\binom{3}{2}x^{3-2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^2+\binom{3}{3}x^{3-3}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^3\\&=\binom{3}{0}x^3-\binom{3}{1}x^2\cdot\frac{1}{x}+\binom{3}{2}x\cdot\frac{1}{x^2}-\binom{3}{3}\frac{1}{x^3}\\&=\binom{3}{0}x^3-\binom{3}{1}x+\binom{3}{2}\frac{1}{x}-\binom{3}{3}\frac{1}{x^3}.\end{aligned}$$

Од $\binom{3}{0}=\binom{3}{3}=1,\binom{3}{1}=\binom{3}{2}=3$ имаме

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=\left(x+\left(-\frac{1}{x}\right)\right)^3=x^3-3x+3\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}.$$

Задача 2. Да се најде осмиот член во развојот на биномот $\left(\sqrt[4]{a^3}+\frac{1}{\sqrt[7]{a^2}}\right)^{11}$.

Решение. Формулата за $(k+1)$-от член е $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, па во нашиот случај имаме $n=11, k=7$. Следствено,

$$T_8=T_{7+1}=\binom{11}{7}\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^{11-7}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{a^2}}\right)^7=\binom{11}{7}\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4\left(a^{-\frac{2}{7}}\right)^7$$
$$=\binom{11}{7}a^{\frac{3\cdot 4}{4}}a^{-\frac{2\cdot 7}{7}}=\binom{11}{7}a^3a^{-2}=\binom{11}{7}a.$$

Бидејќи $\binom{11}{7}=\frac{11!}{7!(11-7)!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{7!4!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=330$ добиваме дека осмиот член е $T_8=330a$.

Задача 3. Во развојот на биномот $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$, да се најде оној член ште не зависи од x.

Решение. Од формула за $(k+1)$-от член и $n=9$ имаме

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}\left(x^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\binom{9}{k}x^{2(9-k)}x^{-k}=\binom{9}{k}x^{18-2k}x^{-k}=\binom{9}{k}x^{18-2k-k}=\binom{9}{k}x^{18-3k}.$$

Бидејќи го бараме членот што не содржи x следува дека во тој член, експонентот на степенот на x е нула, т.е. $x^{18-3k}=x^0,$ од каде што добиваме дека $18-3k=0,$ што значи $k=6.$ Според тоа, бараниот член е $6+1=7$-от и е еднаков со $T_7=\binom{9}{6}$.

Задача 4. Да се најде оној член во развојот на биномот $\left(2x+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)^n$ што не зависи од x, ако се знае дека збирот на сите биномни коефициенти е 256.

Решение. Збирот на сите биномни коефициенти во развојот на кој било бином од степен n е еднаков на 2^n, па во нашиот случај добиваме дека $2^n=256$, односно $2^n=2^8$ па $n=8.$

Од друга страна,

$$T_{k+1}=\binom{8}{k}(2x)^{8-k}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)^k=\binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-k}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}\right)^k=\binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-k}\left(x^{\frac{2}{3}-1}\right)^k=\binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-k}x^{-\frac{k}{3}}.$$

Го бараме членот што не содржи x, па треба да важи $x^{8-k}x^{-\frac{k}{3}}=x^0$, односно $x^{8-k-\frac{k}{3}}=x^0$, т.е.

$8-k-\dfrac{k}{3}=0,$ од каде следува $\dfrac{24-3k-k}{3}=0,$ па $k=6.$ Значи, бараниот член е $T_{6+1}=\binom{8}{6}$.

Задача 5. Збирот на биномните коефициенти на вториот и третиот член во развојот на биномот $\left(a\sqrt{a}+\sqrt[3]{\dfrac{2}{a^2}}\right)^n$ изнесува 45. Да се најде членот кој содржи a^7.

Решение. Биномните коефициенти за вториот и третиот член при развојот на дадениот бином се еднакви со $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, соодветно. Од условот на задачата имаме,

$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=45$. Користејќи дека $\binom{n}{1}=n$ и $\binom{n}{2}=\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=\dfrac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{2!(n-2)!}=\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$, претходната равенка добива облик $n+\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}=45$. Множејќи ја со 2, добиваме

$2n+(n-1)\cdot n=90,$ односно $2n+n^2-n=90,$ па $n^2+n-90=0.$ Корените на последната квадратна равенка се: $n_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot1\cdot90}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{361}}{2}=\dfrac{-1\pm19}{2}$, т.е.

$n_1=\dfrac{-1-19}{2}=\dfrac{-20}{2}=-10$, $n_2=\dfrac{-1+19}{2}=\dfrac{18}{2}=9$. Бидејќи $n_1=-10<0$ решението е $n=n_2=9$. Па,

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}\left(a\sqrt{a}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{a^2}}\right)^k=\binom{9}{k}\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{9-k}\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^k$$
$$=\binom{9}{k}\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{9-k}\left(2^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}\right)^k=\binom{9}{k}a^{\frac{3}{2}(9-k)}2^{\frac{k}{3}}\cdot a^{-\frac{2k}{3}}=\binom{9}{k}\cdot2^{\frac{k}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}(9-k)-\frac{2k}{3}}.$$

Членот што содржи a^7 е членот за кој е исполнет условот $a^{\frac{3}{2}(9-k)-\frac{2k}{3}}=a^7$. Од следните еквиваленции

$$\frac{3}{2}(9-k)-\frac{2k}{3}=7\ \ /\cdot 6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(9-k)-4k=42\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81-9k-4k=42\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13k=39\Leftrightarrow k=3,$$

добиваме дека $T_{3+1}=\binom{9}{3}\cdot 2^{\frac{3}{3}}a^7=\binom{9}{3}\cdot 2a^7=168a^7$.

4. Низи од реални броеви

Секое пресликување $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ се нарекува низа од реални броеви. Ако $a(n)=a_n$, за низата користиме ознака $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ или, пократко, само $\{a_n\}$.

Во низата $\{a_n\}: a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$, a_n се нарекува општ член.

4.1. Аритметичка прогресија

Низата $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ е аритметичка прогресија ако постои $d\in\mathbb{R}$ така што за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $a_{n+1}=a_n+d$ односно $a_{n+1}-a_n=d$.

Општиот член на аритметичката прогресија се определува со формулата

$$a_n=a_1+(n-1)d\ .$$

Збирот на првите n членови се означува со S_n и се пресметува со формулата

$$S_n=\frac{n}{2}\left(a_1+a_n\right).$$

Задача 1. Да се докаже дека низата со општ член $a_n=\dfrac{2n+3}{5}$ е аритметичка прогресија.

Решение. $a_{n+1}-a_n=\frac{2(n+1)+3}{5}-\frac{2n+3}{5}=\frac{2(n+1)+3-2n-3}{5}=\frac{2}{5}$, а $\frac{2}{5}$ е број кој не зависи од n, па низата со општ член $a_n=\frac{2n+3}{5}$ е аритметичка прогресија.

Задача 2. Да се напишат првите 4 члена од аритметичката прогресија ако:

а) $a_1=3$, $d=2$.

б) $a_1=10$, $d=-3$.

в) $a_5=13$, $a_{10}=28$.

Решение.

а)

$$a_1=3$$

$$a_2=a_1+d=3+2=5,$$

$$a_3=a_2+d=5+2=7,$$

$$a_4=a_3+d=7+2=9.$$

б)

$$a_1=10$$

$$a_2=a_1+d=10-3=7,$$

$$a_3=a_2+d=7-3=4,$$

$$a_4=a_3+d=4-3=1.$$

в)

Од $a_5=a_1+4d$ и $a_{10}=a_1+9d$ и од условите на задачата се добива системот

$$\begin{cases} a_1+4d=13\,/\,(-1) \\ a_1+9d=28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} -a_1-4d=-13 \\ a_1+9d=28 \end{cases} / \quad\right\}+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a_1-4d+a_1+9d=-13+28 \\ a_1+9d=28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5d = 15 \\ a_1 + 9d = 28 \end{cases}$$

Добиваме дека $d = 3$, а $a_1 = 28 - 9d = 28 - 9 \cdot 3 = 1$. За следните членови имаме:

$$a_2 = a_1 + d = 1 + 3 = 4,$$

$$a_3 = a_2 + d = 4 + 3 = 7,$$

$$a_4 = a_3 + d = 7 + 3 = 10.$$

Задача 3. Да се определи аритметичка прогресија ако разликата меѓу третиот и првиот член е 16, а збирот на третиот и петтиот член е 144.

Решение. Од условите на задачата имаме

$$\begin{cases} a_3 - a_1 = 16 \\ a_3 + a_5 = 144 \end{cases}.$$

Заменувајќи ги a_3, a_5 со $a_1 + 2d,\ a_1 + 4d$, соодветно, добиваме

$$\begin{cases} a_1 + 2d - a_1 = 16 \\ a_1 + 2d + a_1 + 4d = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d = 16 \\ 2a_1 + 6d = 144 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} d = 8 \\ 2a_1 + 6 \cdot 8 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 8 \\ 2a_1 = 144 - 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 8 \\ 2a_1 = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 8 \\ a_1 = 48 \end{cases}$$

За првите 4 члена добиваме, $a_1 = 48$, $a_2 = a_1 + d = 48 + 8 = 56$, $a_3 = a_2 + d = 56 + 8 = 64$,

$a_4 = a_3 + d = 64 + 8 = 72$. Општиот член на аритметичката прогресија е $a_n = 48 + 8(n-1)$.

Задача 4. Да се најде аритметичка прогресија за која $a_4 : a_7 = 3 : 7$ и $a_3 + a_8 = 20$.

Решение. Од условите на задачата, а потоа со користење на формулата за општиот член, се добива системот:

$$\begin{cases} a_4 : a_7 = 3 : 7 \\ a_3 + a_8 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 3d) : (a_1 + 6d) = 3 : 7 \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 7d) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\left(a_1+3d\right)=3\left(a_1+6d\right) \\ 2a_1+9d=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a_1+21d=3a_1+18d \\ 2a_1+9d=20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a_1+3d=0\,/\,(-3) \\ 2a_1+9d=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12a_1-9d=0 \\ 2a_1+9d=20 \end{cases}$$

Собирајќи ги равенките од последниот систем, добиваме $-12a_1+2a_1=20,$ односно $-10a_1=20,$ т.е. $a_1=-2.$ Од втората равенка за d имаме $9d=20-2(-2),$ односно $9d=24,$ т.е. $d=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}.$

Првите четири члена се следните: $a_1=-2$, $a_2=a_1+d=-2+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$, $a_3=a_2+d=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$, $a_4=a_3+d=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=\frac{18}{3}=6$. Општиот член на аритметичката прогресија е $a_n=-2+\frac{8}{3}\left(n-1\right).$

Задача 5. Да се определи S_n за аритметичката прогресија за којашто важи $a_1=3,\ d=-5,\ a_n=-72$.

Решение. Со замена на условите $a_1=3,\ d=-5,\ a_n=-72$ во $a_n=a_1+(n-1)d$ добиваме:

$$-72=3+(n-1)\left(-5\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -72=3-5n+5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5n=80\Leftrightarrow n=16.$$

За $n=16$, $a_{16}=-72$, па збирот е $S_n=\frac{n}{2}\left(a_1+a_n\right)=\frac{16}{2}\left(a_1+a_{16}\right)=8\left(3-72\right)=8\left(-69\right)=-552.$

Задача 6. Да се определат d и S_n за аритметичката прогресија за којашто важи $a_1=2,\ a_n=47,\ n=16$.

Решение. Од формулата за општиот член $a_n=a_1+(n-1)d$ и од дадените услови имаме:

$$47=2+(16-1)d\Leftrightarrow 47=2+15d\Leftrightarrow 15d=45\Leftrightarrow d=3.$$

Сега, за збирот на првите $n=16$ членови добиваме $S_{16}=\frac{16}{2}\left(2+47\right)=8\cdot 49=392$.

Задача 7. Да се определат n и a_n во аритметичката прогресија ако $a_1 = -4,\ d = 3,\ S_n = 150$.

Решение. Формулата за збир на првите n членови може да се запише во обликот

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right].$$

Со замена на условите на задачата во горната формула добиваме

$$150 = \frac{n}{2}\left[2(-4) + (n-1)\cdot 3\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 300 = n\left(-8 + 3n - 3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 300 = -11n + 3n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 11n - 300 = 0\,.$$

Решенијата на квадратната равенка се $n_{1/2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 + 4\cdot 3\cdot 300}}{2\cdot 3} = \dfrac{11 \pm 61}{6}$, т.е.

$n_1 = \dfrac{11-61}{6} = \dfrac{-50}{6} < 0$, $n_2 = \dfrac{11+61}{6} = \dfrac{72}{6} = 12$. Значи $n = n_2 = 12$, па

$$a_n = a_{12} = a_1 + (12-1)d = -4 + (12-1)\cdot 3 = -4 + 11\cdot 3 = -4 + 33 = 29\,.$$

Задача 8. Да се определи општиот член на аритметичката прогресија за којашто важи $a_2 + a_5 = -4$ и $S_7 = 21$.

Решение. Од $S_n = \dfrac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$ имаме $S_7 = \dfrac{7}{2}\left(a_1 + a_7\right)$. Од условите на задачата го добиваме системот:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{2}\left(a_1 + a_7\right) = -21 \\ a_2 + a_5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a_1 + 7a_7 = -42 \\ a_2 + a_5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a_1 + 7\left(a_1 + 6d\right) = -42 \\ a_1 + d + a_1 + 4d = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14a_1 + 42d = -42 \\ 2a_1 + 5d = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = -3 \\ 2a_1 + 5d = -4 \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме дека $a_1 = -3d - 3$, па ако овој израз се замени во втората равенка добиваме:

$$2\left(-3d - 3\right) + 5d = -4 \Leftrightarrow -6d - 6 + 5d = -4 \Leftrightarrow -d = 2 \Leftrightarrow d = -2\,,$$

па $a_1 = -3d - 3 = -3(-2) - 3 = 6 - 3 = 3$. Општиот член на аритметичката прогресија е $a_n = 3 - 2(n-1)$.

4.2. Геометриска прогресија

Низата $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ е геометриска прогресија ако постои $q \in \mathbb{R}$ $(q \neq 0)$ така што за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ односно } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q .$$

Општиот член на геометриската прогресија се определува со формулата

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} .$$

Збирот на првите n членови се означува со S_n и се пресметува со формулата

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

Задача 1. Да се провери која од дадените низи е геометриска прогресија:

а) $2, 6, 18, ...$ б) $3, -6, 12, -24, ...$ в) $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, ...$ г) $8, 4, 1, ...$

Решение. За дадената низа да биде геометриска прогресија, потребно е за сите последователни членови да биде исполнет условот $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, за некој фиксен ненулти реален број q.

а) За низата $2, 6, 18, ...$ важи $\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$...

Добиваме дека $2, 6, 18, ...$ е геометриска прогресија.

б) За низата $3, -6, 12, -24, ...$ важи $\frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$, $\frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{-6} = -2$, $\frac{a_4}{a_3} = \frac{-24}{12} = -2$...

Добиваме дека $3, -6, 12, -24, ...$ е геометриска прогресија.

в) За низата $-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\ldots$ важи $\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{1}{3}}{-1}=\frac{1}{3}, \frac{a_3}{a_2}=\frac{-\frac{1}{9}}{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\ldots$

Добиваме дека $-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\ldots$ е геометриска прогресија.

г) За низата $8,4,1,\ldots$ важи $\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}, \frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{4}\ldots$

Од $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}$, добиваме дека $8,4,1,\ldots$ не е геометриска прогресија.

Задача 2. Да се напишат првите 4 члена на геометриската прогресија:

а) $a_1=8$, $q=-\frac{1}{2}$ б) $a_1=5$, $a_4=135$.

Решение.

а) Користејќи ја дефиницијата за геометриската прогресија, имаме

$$a_1=8,$$

$$a_2=a_1\cdot q=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-4,$$

$$a_3=a_2\cdot q=(-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2,$$

$$a_4=a_3\cdot q=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1.$$

б) Од формулата за општиот член на геометриската прогресија, $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$, имаме $a_4=a_1\cdot q^{4-1}=a_1\cdot q^3$, па добиваме

$$\begin{cases} a_1=5 \\ 5q^3=135/:5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=5 \\ q^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=5 \\ q=\sqrt[3]{27}=3 \end{cases}.$$

Следствено првите 4 члена се:

$$a_1=5,$$

$$a_2=a_1\cdot q=5\cdot 3=15,$$

$$a_3=a_2\cdot q=15\cdot 3=45,$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 45 \cdot 3 = 135.$$

Задача 3. Да се пресмета a_7 и општиот член a_n на геометриската прогресија ако $a_1 = 2$, $q = -\frac{1}{2}$.

Решение. Од формулата за општиот член на геометриската прогресија, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, имаме

$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = 2 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32},$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \cdot (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Задача 4. Да се најде општиот член на геометриската прогресија ако:

а) $a_7 = 384,\ a_5 = 48$, б) $\begin{cases} a_7 + a_5 = 160 \\ a_6 + a_4 = -80 \end{cases}$.

Решение.

а) Од $a_7 = a_1 \cdot q^6$ и $a_5 = a_1 \cdot q^4$ следува дека $\begin{cases} a_1 q^6 = 384 \\ a_1 q^4 = 48 \end{cases}$. Ако ја поделиме првата равенка на системот со втората, добиваме $\frac{a_1 q^6}{a_1 q^4} = \frac{384}{48}$, т.е. $q^2 = 8,$ односно $q = \pm\sqrt{8}.$

За $q = -\sqrt{8}$, од равенката $a_1 q^4 = 48$, добиваме

$a_1 \cdot \left(-\sqrt{8}\right)^4 = 48$, односно $a_1 \cdot 64 = 48$, т.е. $a_1 = \frac{48}{64} = \frac{3}{4},$ па $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{3}{4}\left(-\sqrt{8}\right)^{n-1}$.

За $q = \sqrt{8}$, слично, од равенката $a_1 q^4 = 48$ добиваме

$a_1 \cdot \left(\sqrt{8}\right)^4 = 48$, односно $a_1 \cdot 64 = 48$, т.е. $a_1 = \frac{48}{64} = \frac{3}{4},$ па $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{3}{4}\left(\sqrt{8}\right)^{n-1}$.

б) Користејќи ја формулата за општиот член на геометриска прогресија, системот се трансформира во форма

$$\begin{cases} a_7 + a_5 = 160 \\ a_6 + a_4 = -80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^6 + a_1 q^4 = 160 \\ a_1 q^5 + a_1 q^3 = -80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^4 \left(q^2 + 1\right) = 160 \\ a_1 q^3 \left(q^2 + 1\right) = -80 \end{cases}$$

Ако сега ја поделиме првата равенка на системот со втората, добиваме

$$\frac{a_1q^4\left(q^2+1\right)}{a_1q^3\left(q^2+1\right)}=\frac{160}{-80}\Leftrightarrow q=-2\,.$$

За да се определи a_1, во втората равенка на системот, $a_1q^3\left(q^2+1\right)=-80$, се заменува $q=-2$, па добиваме

$$a_1(-2)^3\left((-2)^2+1\right)=-80\Leftrightarrow a_1\cdot(-8)\cdot(4+1)=-80\Leftrightarrow -40a_1=-80\Leftrightarrow a_1=2\,.$$

Следствено $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2\cdot(-2)^{n-1}=(-1)^{n-1}\,2^n.$

Задача 5. Збирот на првите три члена на една геометриска прогресија е 6, а збирот на вториот, третиот и четвртиот член е -3. Да се најде општиот член на геометриската прогресија.

Решение. Од условите на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=6\\ a_2+a_3+a_4=-3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=6\\ a_1q+a_1q^2+a_1q^3=-3\end{cases}$$

Ако сега ги поделиме равенките од системот, имаме

$$\frac{a_1+a_1q+a_1q^2}{a_1q+a_1q^2+a_1q^3}=\frac{6}{-3}\Leftrightarrow\frac{a_1(1+q+q^2)}{a_1q(1+q+q^2)}=-2\Leftrightarrow\frac{1}{q}=-2\Leftrightarrow q=-\frac{1}{2}\,.$$

Од првата равенка на системот, за a_1 добиваме

$$a_1+a_1\left(-\frac{1}{2}\right)+a_1\left(-\frac{1}{2}\right)^2=6\Leftrightarrow a_1-\frac{a_1}{2}+\frac{a_1}{4}=6\Leftrightarrow a_1\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=6\Leftrightarrow a_1\frac{4-2+1}{4}=6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1\cdot\frac{3}{4}=6\Leftrightarrow a_1=\frac{4}{3}\cdot 6=8\,.$$

Првите четири члена се $a_1=8,\ a_2=a_1q=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$, $a_3=a_1q^2=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{8}{4}=2$,

$a_4=a_1q^3=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{8}{-8}=-1$, а $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^3\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-4}}.$

Задача 6. Да се пресметаат a_n и n за геометриската прогресија, ако $a_1=7,\ q=2,\ S_n=1785$.

Решение. Со замена на дадените услови во формулата за збирот на првите n членови, $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, добиваме

$$1785 = 7 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow 1785 = 7\left(2^n - 1\right) \Leftrightarrow 2^n - 1 = \frac{1785}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^n - 1 = 255 \Leftrightarrow 2^n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8\,.$$

Па $a_8 = a_1 q^7 = 7 \cdot 2^7 = 7 \cdot 128 = 896$.

Задача 7. Да се пресметаат n и S_n ако $a_1 = 3,\ q = -2,\ a_n = -1536$.

Решение. Од $a_n = a_1 q^{n-1}$, заменувајќи ги условите од задачата, добиваме

$$-1536 = 3 \cdot \left(-2\right)^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-2\right)^{n-1} = \frac{-1536}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-2\right)^{n-1} = -512 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-2\right)^{n-1} = \left(-2\right)^9 \Leftrightarrow n - 1 = 9 \Leftrightarrow n = 10\,.$$

Бараната сума е $S_{10} = 3\dfrac{\left(-2\right)^{10} - 1}{\left(-2\right) - 1} = 3\dfrac{1024 - 1}{-3} = -1023$.

4.3. Практични примери со примена на аритметичка и геометриска прогресија

Задача 1. Една оранжерија почнала да произведува домати во месец јануари. Секој нареден месец, производството на домати се зголемувало за исто количество во однос на производството од претходниот месец. Производството во мај изнесувало 5200 *kg*, а во август 7600 *kg*.

Да се пресмета:

а) Месечното зголемување на производството.

б) Произведеното количество домати во јануари.

в) Вкупното производство од јануари до септември.

Решение. Бидејќи производството на домати во оранжеријата, секој месец се зголемувало за исто количество во однос на претходниот месец, заклучуваме дека количеството на домати произведени во еден месец (месечното количество на домати), всушност, претставува член на аритметичка прогресија, со прв член, a_1, кој го претставува произведеното количество домати во јануари и константно месечно зголемување на производството, d. Во примерот се дадени условите $a_5 = 5200$ и $a_8 = 7600$.

а) Дадените услови и формулата за пресметување на општиот член на аритметичка прогресија го формираат системот

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 5200 \\ a_1 + 7d = 7600 \end{cases}$$

Од втората равенка за првиот член имаме $a_1 = 7600 - 7d$. Со замена на $a_1 = 7600 - 7d$ во првата равенка добиваме

$$7600 - 7d + 4d = 5200 \Leftrightarrow -3d = -2400 \Leftrightarrow d = 800.$$

Конечно, месечното зголемување на производството е $800kg$.

б) Во јануари се произведени

$a_1 = 7600 - 7d = 7600 - 7 \cdot 800 = 7600 - 5600 = 2000kg$ домати.

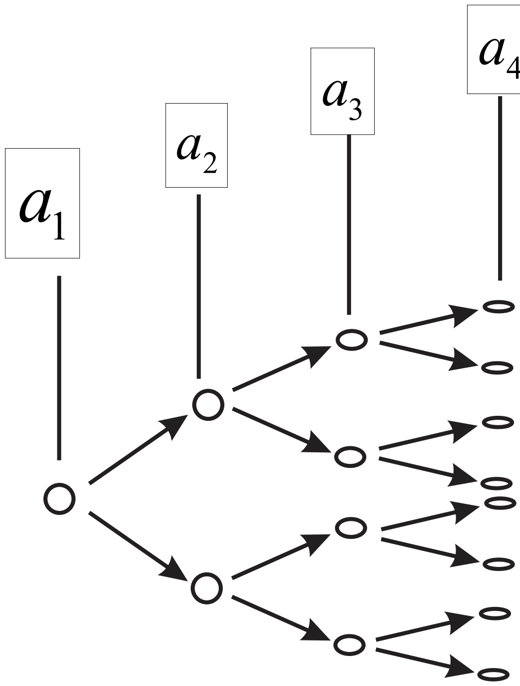
в) За да се најде вкупното производство од јануари до септември треба да се најде збирот

$$a_1 + a_2 + ... + a_9 = S_9 = \frac{9}{2}\left(a_1 + a_9\right) = \frac{9}{2}\left(a_1 + a_1 + 8d\right) =$$
$$= \frac{9}{2}\left(2 \cdot 2000 + 8 \cdot 800\right) = \frac{9}{2} \cdot 10400 = 46800.$$

Вкупното производство од јануари до септември изнесува 46800 *kg.*

Задача 2. Со размножување, од една бактерија за еден час се добиваат 2. Колку бактерии ќе се развијат за 10 часа, а колку за 24 часа, под услов да не се наруши процесот на размножувањето?

Решение. Од условите на задачата имаме дека размножувањето на бактериите се развива по следната шема:



Значи, бројот на бактерии, пресметан на почетокот на секој час, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ претставува член на геометриска прогресија. Според тоа, бројот на бактерии, после еден час, е еднаков со членот a_2, после два часа е a_3 и по истиот принцип, по десеттиот час ќе имаме a_{11} бактерии. Знаејќи дека $a_1 = 1, q = 2$ од формула за општ член, имаме $a_{11} = a_1 \cdot q^{10} = 2^{10}$.

Слично, по 24-тиот час, ќе има $a_{25} = a_1 \cdot q^{24} = 2^{24}$ бактерии.

4.4. Претставување низи на бројна оска. Монотоност и ограниченост на низи

За низата со општ член a_n велиме дека:

А) е монотоно растечка, ако за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} - a_n \geq 0$ ($\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, a_n > 0$),

Б) е монотоно опаѓачка, ако за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} - a_n \leq 0$ ($\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, a_n > 0$),

В) е ограничена, ако постојат $m, M \in \mathbb{R}$, така што за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $m \leq a_n \leq M$.

В1) е ограничена од горе (десно), ако постои $M \in \mathbb{R}$, така што за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \leq M$.

В2) е ограничена од долу (лево), ако постои $m \in \mathbb{R}$, така што за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $m \le a_n$.

Задача 1. Општиот член на низата $\{a_n\}$ е даден со

а) $a_n = 2n - 5$, б) $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$, в) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$, г) $a_n = \dfrac{n+2}{n^2+1}$.

Да се напишат првите 4 члена, а потоа да се претстават на бројната оска.

Решение. Членовите од низата ги пресметуваме така што на местото на променливата n се заменува соодветниот индекс.

а) Значи:

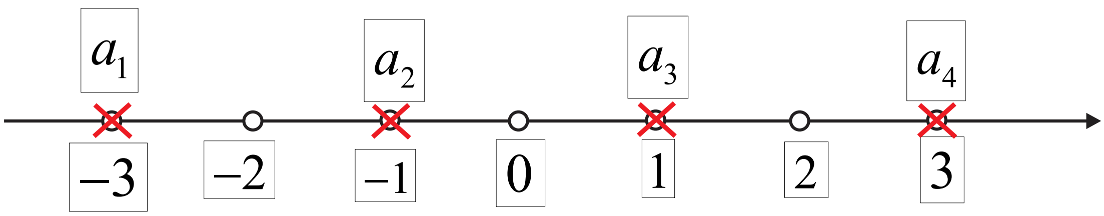
За $n=1$ имаме $a_1 = 2 \cdot 1 - 5 = 2 - 5 = -3$,

За $n=2$ имаме $a_2 = 2 \cdot 2 - 5 = 4 - 5 = -1$,

За $n=3$ имаме $a_3 = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$,

За $n=4$ имаме $a_4 = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$.

Да ги претставиме овие броеви како точки на бројната оска:



Од графичкото претставување може да заклучиме дека првите членови на низата се на исто растојание и нивните вредности растат кога растат индексите.

б)

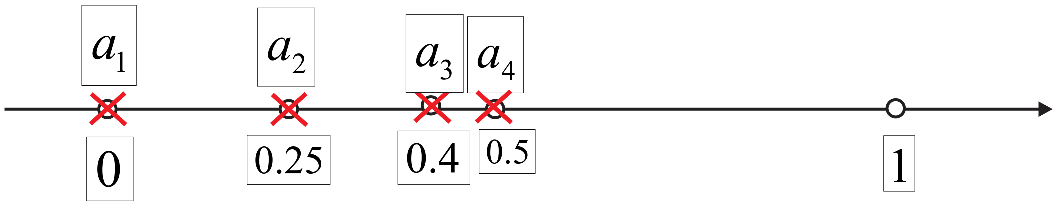
За $n=1$ имаме $a_1 = \dfrac{1-1}{1+2} = \dfrac{0}{3} = 0$,

За $n=2$ имаме $a_2 = \dfrac{2-1}{2+2} = \dfrac{1}{4} = 0.25$,

За $n=3$ имаме $a_3 = \dfrac{3-1}{3+2} = \dfrac{2}{5} = 0.4$,

За $n=4$ имаме $a_4 = \dfrac{4-1}{4+2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = 0.5$.

Да ги претставиме овие броеви како точки на бројната оска:



Во овој пример, првите членови се повторно во растечки редослед, но растојанието меѓу последователните членови станува помало кога растат индексите, а вредностите на членовите на низата се помали од 1.

в)

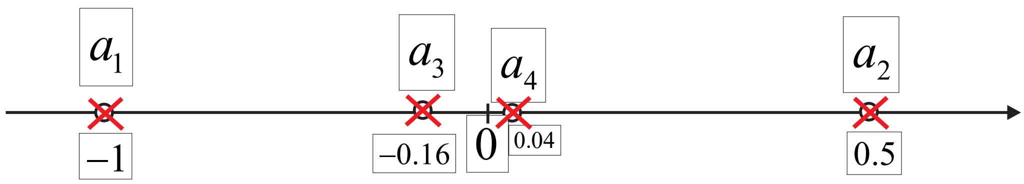
$$\text{За } n=1 \text{ имаме } a_1=\frac{(-1)^1}{1!}=\frac{-1}{1}=-1,$$

$$\text{За } n=2 \text{ имаме } a_2=\frac{(-1)^2}{2!}=\frac{1}{2}=0.5,$$

$$\text{За } n=3 \text{ имаме } a_3=\frac{(-1)^3}{3!}=\frac{-1}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{-1}{6}=-0.16,$$

$$\text{За } n=4 \text{ имаме } a_3=\frac{(-1)^4}{4!}=\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{24}=0.04.$$

Да ги претставиме овие броеви како точки на бројната оска:



За разлика од првите примери, тука првите членови алтерираат во лева и десна страна на нулата, но кога индексот се зголемува, членовите се натрупуваат околу нулата.

г) Се остава на читателот.

Задача 2. Да се испита монотоноста на низата чиј општ член е:

а) $a_n=\dfrac{5}{n+1}$, б) $a_n=1-n^2$, в) $a_n=\dfrac{1}{n!}$, г) $a_n=\dfrac{3+n}{3n+1}$.

Решение. Нека $n\in\mathbb{N}$ е произволно избран број.

а) За $a_n=\dfrac{5}{n+1}$ имаме

$$a_{n+1}-a_n=\frac{5}{(n+1)+1}-\frac{5}{n+1}=\frac{5}{n+2}-\frac{5}{n+1}$$
$$=\frac{5\left(n+1\right)-5\left(n+2\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}=\frac{5n+5-5n-10}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}=\frac{-5}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}<0.$$

Од произволноста на $n\in\mathbb{N}$, заклучуваме дека докажаното важи за секој $n\in\mathbb{N}$, па значи дека низата е монотоно опаѓачка.

б) За $a_n=1-n^2$ имаме

$$a_{n+1}-a_n=1-\left(n+1\right)^2-\left(1-n^2\right)=1-n^2-2n-1-1+n^2=-2n-1=-\left(2n+1\right)<0\,.$$

Од произволноста на $n\in\mathbb{N}$, заклучуваме дека докажаното важи за секој $n\in\mathbb{N}$, па значи дека низата е монотоно опаѓачка.

в) За $a_n=\frac{1}{n!}>0$ имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{\left(n+1\right)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{\frac{1}{n!\left(n+1\right)}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{\left(n+1\right)}\leq 1.$$

Од произволноста на $n\in\mathbb{N}$, заклучуваме дека докажаното важи за секој $n\in\mathbb{N}$, па значи дека низата е монотоно опаѓачка.

г) За $a_n=\frac{3+n}{3n+1}$ имаме

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3+(n+1)}{3\left(n+1\right)+1}-\frac{3+n}{3n+1}=\frac{4+n}{3n+4}-\frac{3+n}{3n+1}=$$
$$=\frac{\left(4+n\right)\left(3n+1\right)-\left(3+n\right)\left(3n+4\right)}{\left(3n+4\right)\left(3n+1\right)}=$$
$$=\frac{12n+4+3n^2+n-9n-12-3n^2-4n}{\left(3n+4\right)\left(3n+1\right)}=$$
$$=\frac{-8}{\left(3n+4\right)\left(3n+1\right)}<0.$$

Од произволноста на $n\in\mathbb{N}$, заклучуваме дека докажаното важи за секој $n\in\mathbb{N}$, па значи дека низата е монотоно опаѓачка.

Задача 3. Да се испита ограниченоста на низите:

а) $a_n=\frac{n}{n+1}$, б) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$, в) $a_n=1+\frac{1}{n}$, г) $a_n=\frac{2n-2}{n+5}$.

Решение. а) Нека $n\in\mathbb{N}$ е произволно избран. Од $n\le n+1$ следува $\frac{n}{n+1}\le\frac{n+1}{n+1}=1$. Од друга страна, $a_n=\frac{n}{n+1}\ge 0$ како количник на два позитивни броја. Конечно, имаме дека за сите $n\in\mathbb{N}$ важи $0\le a_n=\frac{n}{n+1}\le 1$ т.е. дадената низа е ограничена.

б) За сите $n\in\mathbb{N}$ важи $-1\le(-1)^n\le 1$. Ако последниот израз се подели со позитивниот број n се добива $\frac{-1}{n}\le\frac{(-1)^n}{n}\le\frac{1}{n}$. Конечно, од неравенствата $\frac{1}{n}\le 1$ и $-\frac{1}{n}\ge -1$ добиваме $-1\le a_n=\frac{(-1)^n}{n}\le 1$ т.е. низата е ограничена.

в) За $n\in\mathbb{N}$, $a_n=1+\frac{1}{n}\le 1+\frac{1}{1}=2$ и $a_n=1+\frac{1}{n}\ge 1+0=1$. Значи, $1\le a_n=1+\frac{1}{n}\le 2$ за сите $n\in\mathbb{N}$. Следува, низата a_n е ограничена.

г) За да оцениме кои се можните граници, ќе најдеме неколку први членови на низата:

$$\text{За } n=1 \text{ имаме } a_1=\frac{2\cdot 1-2}{1+5}=\frac{0}{6}=0,$$

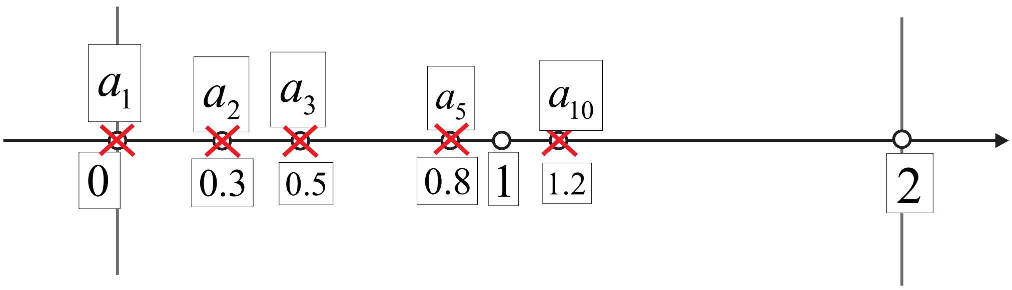
$$\text{За } n=2 \text{ имаме } a_2=\frac{2\cdot 2-2}{2+5}=\frac{2}{7}=0.29,$$

$$\text{За } n=3 \text{ имаме } a_3=\frac{2\cdot 3-2}{3+5}=\frac{4}{8}=0.5,$$

$$\text{За } n=4 \text{ имаме } a_4=\frac{2\cdot 4-2}{4+5}=\frac{6}{9}=0.67,$$

$$\text{За } n=5 \text{ имаме } a_5=\frac{2\cdot 5-2}{5+5}=\frac{8}{10}=0.8,$$

$$\text{За } n=10 \text{ имаме } a_5=\frac{2\cdot 10-2}{10+5}=\frac{18}{15}=1.2.$$



Од графичкото претставување гледаме дека можни кандидати за долна и горна граница се точките 0 и 2 соодветно.

Прво ќе докажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \dfrac{2n-2}{n+5} \le 2$. Последното неравенство е еквивалентно со $2n-2 \le 2(n+5)$, а, оттука, добиваме $2n-2 \le 2n+10 \Leftrightarrow -2 \le 10$ што е секогаш точно. Од друга страна, за $n \in \mathbb{N}$, е јасно дека $\dfrac{2n-2}{n+5} \ge 0$, како количник на природни броеви. Конечно, докажавме дека сите членови на низата се меѓу границите 0 и 2, односно низата со општ член $a_n = \dfrac{2n-2}{n+5}$ е ограничена.

4.5. Гранична вредност на низа

Ако низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни, тогаш и нивниот збир, разлика, производ, производ на константа со која било од нив и количник ($b_n \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$) се конвергентни, и притоа важи:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(C \cdot b_n) = C \cdot \lim_{n\to\infty} a_n, C \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, b_n \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} b_n \ne 0.$$

Ако низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни и изразот $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ постои, тогаш важи $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Познати се следниве лимеси:

* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ за $\alpha \ge 1$

* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} 0 & , b > a > 0 \\ 1 & , b = a \\ \infty & , 0 < b < a \end{cases}$

* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Во задачите 1 - 16 од овој дел, барањето е да се определи граничната вредност на дадената низа, па за да нема повторување на истиот текст, во поставувањето на задачите ќе стои само $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)$. (Често, заради поедноставен запис, наместо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)$ ќе пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, но притоа внимаваме да ја користиме втората ознака само кога истата не прави различно толкување од даденото.)

Задача 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)\left(3-\dfrac{3}{4^n}\right)\right]$.

Решение. Ако се користат правилата за производ, збир, разлика, како и познати лимеси, имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(2+\frac{3}{n^2}\right)\left(3-\frac{3}{4^n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{3}{4^n}\right)=\left[\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)\right]\cdot\left[\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4^n}\right)\right]=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}2+3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\cdot\left[\lim_{n\to\infty}3-3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=2\cdot 3=6.$$

Задача 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}\right]$.

Решение. Користејќи ја дефиницијата на факториел, имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!+n!(n+1)}{n!(n+1)(n+2)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!\left[1+(n+1)\right]}{n!(n+1)(n+2)}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=0.$$

Задача 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-4}{3n+5}$.

Решение. Кога станува збор за лимеси на дробно-рационални изрази, каде броителот и именителот се полиноми со ист степен, може да поделиме со n^α, каде што α е највисокиот степен во полиномите.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n-4}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(7n-4\right):n}{\left(3n+5\right):n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{7n-4}{n}}{\frac{3n+5}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7-\frac{4}{n}}{3+\frac{5}{n}}\right)=\frac{7}{3}.$$

Задача 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+1}{5n^2+6n-2}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+1}{5n^2+6n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^2-4n+1\right):n^2}{\left(5n^2+6n-2\right):n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{3n^2-4n+1}{n^2}}{\dfrac{5n^2+6n-2}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{5+\dfrac{6}{n}-\dfrac{2}{n^2}}\right)=\frac{3}{5}.$$

Задача 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-2}{n+4}-\dfrac{2}{n^2}\right)$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-2}{n+4}-\frac{2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(5n-2)n^2-2(n+4)}{\left(n+4\right)n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3-2n^2-2n-8}{n^3+4n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(5n^3-2n^2-2n-8\right):n^3}{\left(n^3+4n^2\right):n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{5n^3-2n^2-2n-8}{n^3}}{\dfrac{n^3+4n^2}{n^3}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{8}{n^3}}{1+\dfrac{4}{n}}\right)=5.$$

Задача 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-1}{2n-3}$.

Решение. Ако броителот има степен поголем од именителот тогаш може да ги поделиме двата изрази со n^{α}, каде што α е степенот на именителот.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^2+4n-1\right):n}{\left(2n-3\right):n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{3n^2+4n-1}{n}}{\dfrac{2n-3}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4-\dfrac{1}{n}}{2-\dfrac{3}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\left(3+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}{2-\dfrac{3}{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}(n)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{3}{n}}\right)=(+\infty)\cdot\frac{3}{2}=+\infty.$$

Задача 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{n^2+n-4}$.

Решение. Ако степенот на броителот е помал од оној на именителот, тогаш може да поделиме со n^{α}, каде што α е степенот на броителот.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^2+n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+5):n}{(n^2+n-4):n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n+5}{n}}{\frac{n^2+n-4}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{5}{n}}{n+1-\frac{4}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2+\frac{5}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}}\right)=0\cdot 2=0.$$

Задача 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+7^{n+2}}{5^n+7^{n+1}}$.

Решение. За внатре во лимесите да добиеме изрази од облик $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, каде $a<b$, броителот и именителот се делат со 7^n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+7^{n+2}}{5^n+7^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(5^{n+1}+7^{n+2}\right):7^n}{\left(5^n+7^{n+1}\right):7^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5\cdot 5^n+7^2\cdot 7^n}{7^n}}{\frac{5^n+7\cdot 7^n}{7^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n+7^2}{\left(\frac{5}{7}\right)^n+7}\right]=\frac{49}{7}=7.$$

Задача 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-7}{2n+3}$.

Решение. Во овој пример броителот не е полином, но сепак е израз со асимптотски степен еднаков на 1. Задачата се решава со постапка како со полиноми од ист степен т.е. броителот и именителот се делат со n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}-7}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-7\right):n}{(2n+3):n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}-\frac{7}{n}}{\frac{2n+3}{n}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}-\frac{7}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right)==\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}-\frac{7}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Задача 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}\right)$.

Решение. Во овој пример прво вршиме рационализација, а потоа примерот се сведува на делење на изрази со исти асимптотски степени:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+2n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2-2n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+2n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.$$

Задача 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{3n+1}-\dfrac{n}{6}\right)$.

Решение. Знаеме дека изразот $1+2+3+...+n$ претставува збир на првите n членови на аритметичката прогресија $1,2,3,\ldots$. Од $a_1=1, d=1$ и $S_n=\frac{n}{2}\left(a_1+a_n\right)$ добиваме,

$$1+2+3+...+n=\frac{n}{2}\left(1+n\right)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Сега, со замена на овој израз во примерот имаме,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+...+n}{3n+1}-\frac{n}{6}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n+1}-\frac{n}{6}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)}{6n+2}-\frac{n}{6}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{6n\left(n+1\right)-\left(6n+2\right)n}{6\left(6n+2\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+6n-6n^2-2n}{36n+12}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{36n+12}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n}{n\left(36+\frac{12}{n}\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{36+\frac{12}{n}}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Задача 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$.

Решение. Во овој пример збировите се членови на геометриските прогресии:

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{2^n}$, $1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\ldots,\frac{1}{3^n}$, соодветно.

За првата прогресија имаме $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$, па збирот е $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, односно

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Од друга страна, за геометриската прогресија $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{3^n}$ важи $a_1 = 1, q = \frac{1}{3}$, па

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

Со замена на овие изрази во изразот од лимесот, добиваме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=\frac{4}{3}.$$

Задача 13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$.

Решение. Со користење на својства на гранични вредности и познати лимеси, добиваме

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}\cdot 5}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^5=e^5.$$

Задача 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^n$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3-3}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\cdot\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-3}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-3}=e\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-3}=e\cdot 1^{-3}=e.$$

Задача 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+8}{n+6}\right)^n$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+8}{n+6}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+6+2}{n+6}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+6}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+6}{2}}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+6}{2}}\right)^{n\cdot\frac{n+6}{2}\cdot\frac{2}{n+6}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+6}}=e^2.$$

Задача 16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+1}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{2n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{(2n+2)\cdot\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2}{2n+1}}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right]^{\frac{2(2n+2)}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(2n+2)}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+4}{2n+1}}=e^2.$$

5. Апсолутна вредност

За $a \in \mathbb{R}$, $|a| = \begin{cases} a & ,a \geq 0 \\ -a & ,a < 0 \end{cases}$.

Задача 1. Да се определи вредноста: а) $|2-|3+5-16||$; б) $||1-|3-15||-8|$.

Решение.

а) $|2-|3+5-16|| = |2-|8-16|| = |2-|-8|| = |2-8| = |-6| = 6$;

б) $||1-|3-15||-8| = ||1-|-12||-8| = ||1-12|-8| = ||-11|-8| = |11-8| = |3| = 3$.

Задача 2. Да се реши равенката:

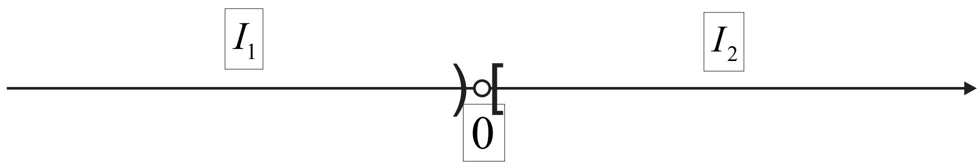
а) $|x-2|-3=5$; б) $|3x-2|+|x+2|=8$; в) $|x-1|+x=|2x+1|$.

Решение. а) $|x-2|-3=5$

Прво ќе ја испитаме вредноста на апсолутната вредност $|x-2|$:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$$

Забележуваме дека точката $x=2$ е критична точка во однос на која се менува знакот на апсолутната вредност. Па, треба да разгледуваме во следниве интервали $I_1 = (-\infty, 2)$ и $I_2 = [2, \infty)$.



Во првиот интервал, I_1, $|x-2| = -x+2$, а во вториот, I_2, $|x-2| = x-2$.

1) Ако $x \in I_1$ равенката $|x-2|-3=5$ го добива следниов облик:

$$-x+2-3=5 \Leftrightarrow -x-1=5 \Leftrightarrow x=-6.$$

Од $-6 \in I_1 = (-\infty, 2)$ следува дека $x_1 = -6$ е решение на дадената равенка.

2) Ако $x \in I_2$ равенката $|x-2|-3=5$ го добива следниов облик:

$$x-2-3=5 \Leftrightarrow x-5=5 \Leftrightarrow x=10.$$

Од $10 \in I_2=(2,\infty)$ следува дека $x_2=10$ е решение на дадената равенка.

Конечно, добиваме дека $x_1=-6$ и $x_2=10$ се решенија на равенката $|x-2|-3=5$.

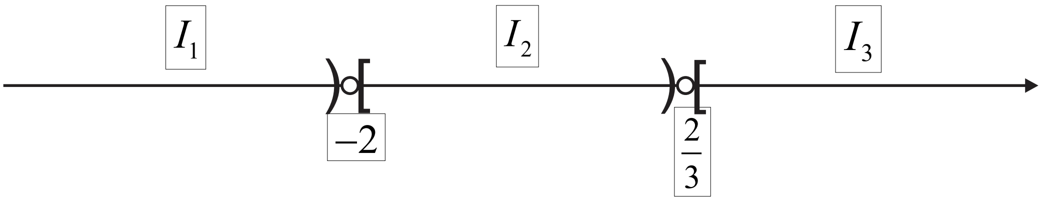
б) $|3x-2|+|x+2|=8$.

За апсолутните вредности имаме:

$$|3x-2|=\begin{cases}3x-2, & 3x-2\ge 0\\ -(3x-2), & 3x-2<0\end{cases}=\begin{cases}3x-2, & 3x\ge 2\\ -3x+2, & 3x<2\end{cases}=\begin{cases}3x-2, & x\ge \frac{2}{3}\\ -3x+2, & x<\frac{2}{3}\end{cases},$$

$$|x+2|=\begin{cases}x+2, & x+2\ge 0\\ -(x+2), & x+2<0\end{cases}=\begin{cases}x+2, & x\ge -2\\ -x-2, & x<-2\end{cases}.$$

Интервалите кои ќе ги разгледуваме може да ги добиеме ако на реалната права ги нанесеме критичните точки $\frac{2}{3}$ и -2.



Ги имаме следните интервали $I_1=(-\infty,-2)$, $I_2=\left[-2,\frac{2}{3}\right)$ и $I_3=\left[\frac{2}{3},\infty\right)$.

За да имаме појасна слика за тоа како се менува знакот на апсолутните вредности во дадените интервали ја правиме следнава табела:

	$-\infty$	-2	$\frac{2}{3}$	∞
$\lvert 3x-2\rvert$	$-3x+2$	$-3x+2$	0 $\quad 3x-2$	
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0 $\quad x+2$	$x+2$	

1) За $x \in I_1=(-\infty,-2)$ равенката го добива обликот:

$$-3x+2-x-2=8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2 \notin I_1 .$$

2) За $x \in I_2 = \left[-2, \frac{2}{3}\right)$ добиваме:

$$-3x + 2 + x + 2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2 \in I_2 .$$

3) За $x \in I_3 = \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$, равенката го добива обликот:

$$3x - 2 + x + 2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2 \in I_3 .$$

Конечно, заклучуваме дека решенија на равенката се: $x_1 = -2,\ x_2 = 2$.

Проверка:

За $x_1 = -2$, $|3(-2) - 2| + |-2 + 2| = |-8| = 8$.

За $x_2 = 2$, $|3 \cdot 2 - 2| + |2 + 2| = |4| + |4| = 4 + 4 = 8$.

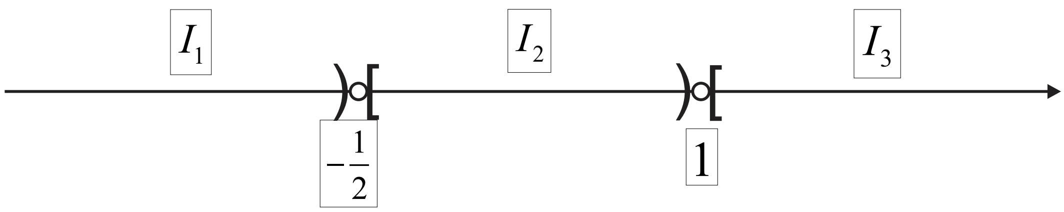
в) $|x - 1| + x = |2x + 1|$.

За апсолутните вредности имаме:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases},$$

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1), & 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1, & x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1, & x < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Оттука добиваме дека $-\frac{1}{2}, 1$ се критичните точки. Со нив, реалната права се дели на интервалите $I_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$ и $I_3 = [1, \infty)$.



Табелата што се добива е следнава:

	$-\infty$ ... $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ ... 1	1 ... ∞
$\|2x+1\|$	$-2x-1$	0 $\quad 2x+1$	$2x+1$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	0 $\quad x-1$

Сега, ќе ги најдеме решенијата во секој интервал.

1) Ако $x \in I_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ равенката го добива обликот:

$$-x+1+x=-2x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=-2x-1 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1 \in I_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right).$$

2) За $x \in I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$ имаме:

$$-x+1+x=2x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=2x+1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0 \in I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1\right).$$

3) За $x \in I_3 = [1, \infty)$ имаме:

$$x-1+x=2x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=2x+1 \Leftrightarrow -1=1.$$

Последниот исказ е секогаш неточен, па следува дека во интервалот $I_3 = [1, \infty)$ нема ниту едно решение на равенката.

Заклучуваме дека единствени решенија на дадената равенка се -1 и 0.

6. Функции од реална променлива

6.1. Дефинициона област

За да се определи дефинициона област на некоја функција $f: X \to \mathbb{R}$, често треба да се разгледува некој од дадените случаи:

1) Функцијата f содржи израз од обликот $\sqrt{A}$, па следува дека $A \geq 0$,

2) Функцијата f содржи израз од обликот $\ln(A)$, па следува дека $A > 0$,

3) Функцијата f содржи израз од обликот $\frac{1}{A}$, па следува дека $A \neq 0$.

Задача 1. Нека $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Да се докаже дека $f(a) = f\left(\frac{1}{a}\right)$.

Решение. Ако наместо променливата x замениме a добиваме:

$$f(a) = a^2 + \frac{1}{a^2}. \tag{1}$$

Од друга страна, ако наместо x замениме $\frac{1}{a}$ добиваме:

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a^2} + a^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}. \tag{2}$$

Бидејќи десните страни на врските (1) и (2) се еднакви, следува дека се еднакви и нивните леви страни, т.е. $f(a) = f\left(\frac{1}{a}\right)$.

Задача 2. Да се најде дефинициона област на функциите:

а) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$; б) $f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-1}$;

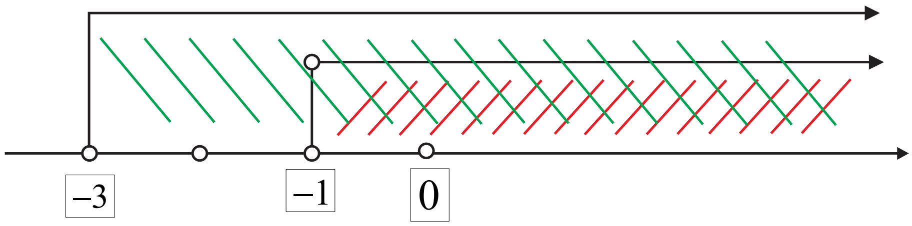
в) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-3x-10} + \ln(4x+3)$; г) $f(x) = \log\left(\frac{x-3}{x+2}\right) + \sqrt{4+x}$.

Решение. а) Функцијата содржи и дропка и квадратен корен, па треба да се определат следните множества: $D_1: x+3 \neq 0$, $D_2: \frac{x+1}{x+3} \geq 0$.

Јасно е дека $D_1 : x \neq -3$ па $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Од друга страна, $\frac{x+1}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}$. За првиот систем имаме:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x > -3 \end{cases}$$

Решаваме со графички метод:

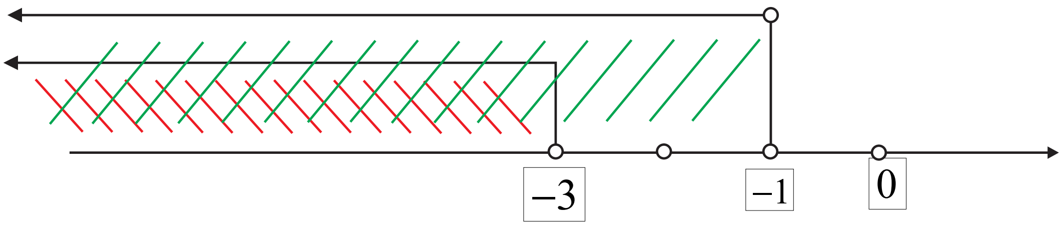


т.е. имаме решение $[-1, \infty)$.

За вториот систем, слично:

$$\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x < -3 \end{cases}$$

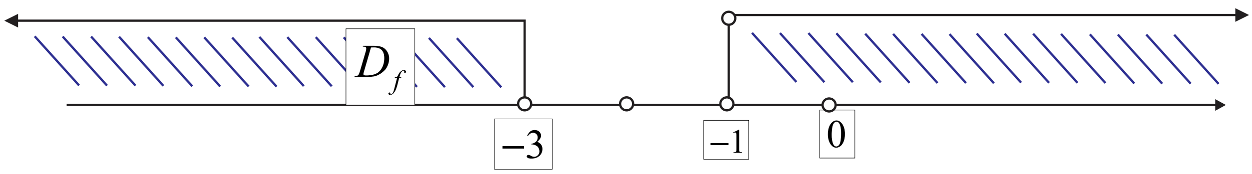
За решението, од графичкиот приказ, имаме:



т.е. се добива множеството $(-\infty, -3)$.

Конечно за D_2, бараме унија $D_2 = [-1, \infty) \cup (-\infty, -3)$, па за дефиниционата област добиваме:

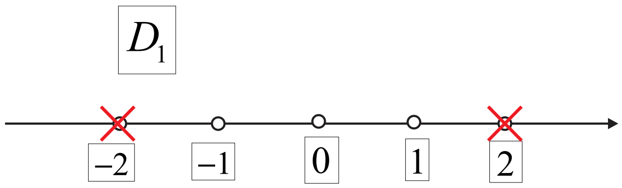
$$D_f = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \cap \left([-1, \infty) \cup (-\infty, -3)\right) = [-1, \infty) \cup (-\infty, -3)$$



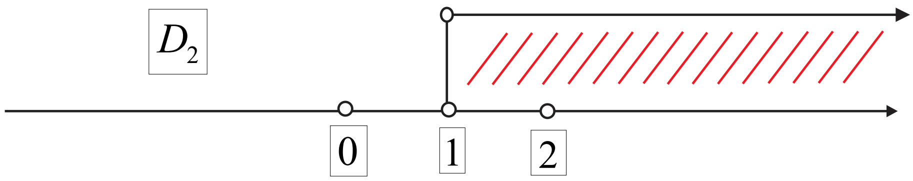
б) За дефиниционата област на функцијата $f(x)=\frac{x}{x^2-4}+\sqrt{x-1}$, треба да ги определиме множествата D_1, D_2:

$$D_1=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-4\neq 0\right\},\ D_2=\left\{x\middle|x-1\geq 0\right\}.$$

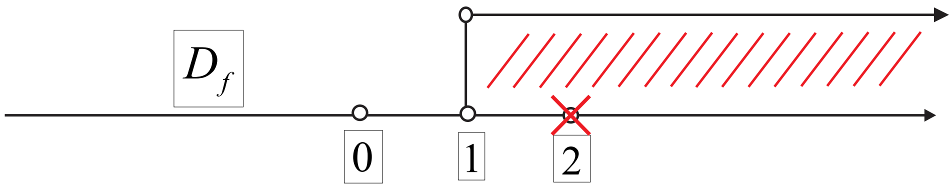
Прво ги наоѓаме нулите на равенката $x^2-4=0$, која е еквивалентна со $(x-2)(x+2)=0$, па решенијата се $x_1=-2,\ x_2=2$, односно добиваме $D_1=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.



Од друга страна имаме $D_2=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x\geq 1\right\}=[1,\infty)$.



Конечно, за дефиниционата област на дадената функција добиваме $D_f=D_1\cap D_2=\left(\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\right)\cap[1,\infty)=[1,2)\cup(2,\infty)$.



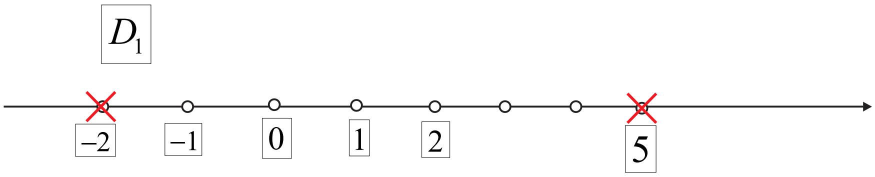
в) Дефиниционата област на функцијата $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-3x-10}+\ln(4x+3)$ е $D_f=D_1\cap D_2$, каде:

$$D_1=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-3x-10\neq 0\right\},\ D_2=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|4x+3>0\right\}.$$

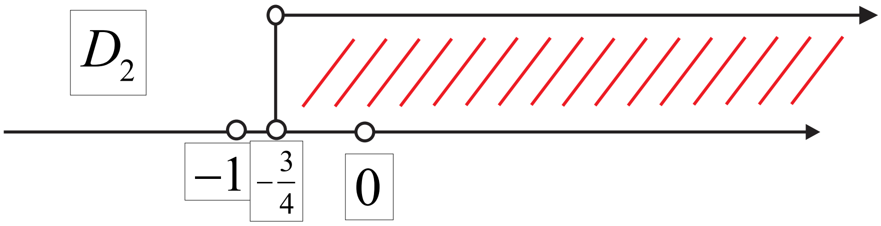
Прво да ги најдеме нулите на квадратната равенка $x^2-3x-10=0$:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{3\pm 7}{2},\text{ па } x_1=\frac{3-7}{2}=-2,\ x_2=\frac{3+7}{2}=5.$$

Имаме $D_1=\mathbb{R}\setminus\{-2,5\}$.



$$D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x > -3\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{-3}{4}\right\} = \left(-\frac{3}{4}, \infty\right).$$



За дефиниционата област на дадената функција добиваме

$$D_f = D_1 \cap D_2 = (\mathbb{R} \setminus \{-2,5\}) \cap \left(-\frac{3}{4}, \infty\right) = \left(-\frac{3}{4}, \infty\right) \setminus \{5\}.$$

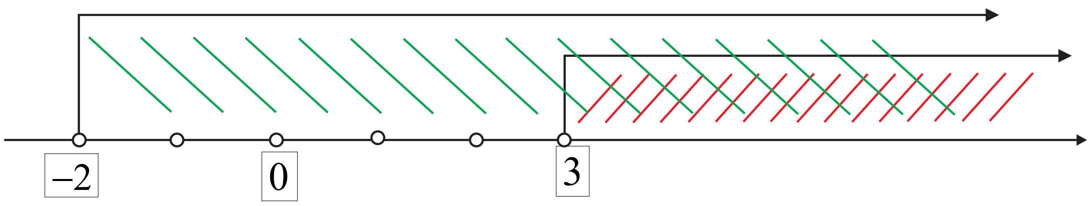
г) За дефиниционата област на дадената функција $f(x) = \log\left(\frac{x-3}{x+2}\right) + \sqrt{4+x}$ треба да се определат множествата D_1, D_2, каде:

$$D_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-3}{x+2} > 0\right\},\ D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 + x \geq 0\}.$$

За првото множество, треба да се реши неравенката $\frac{x-3}{x+2} > 0$:

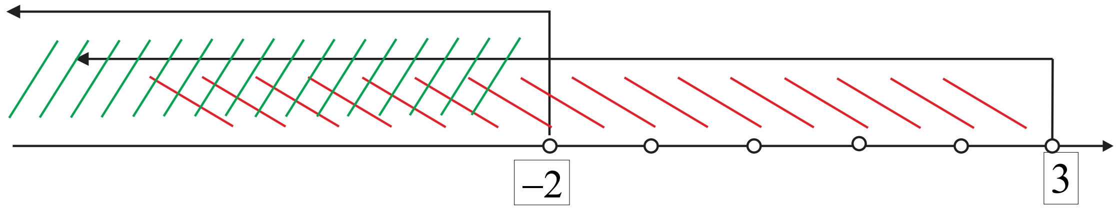
$$\frac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$$

Прviot систем од неравенки $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -2 \end{cases}$ го има следното графичко решение:



т.е. $x \in (3, \infty)$.

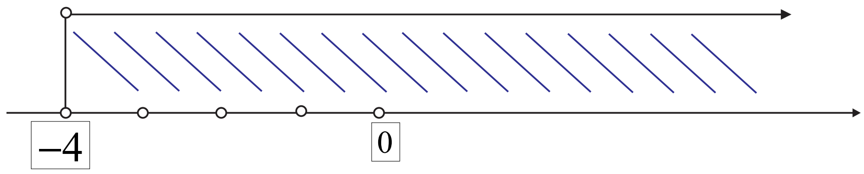
Вториот систем $\begin{cases} x-3<0 \\ x+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x<-2 \end{cases}$ има решение:



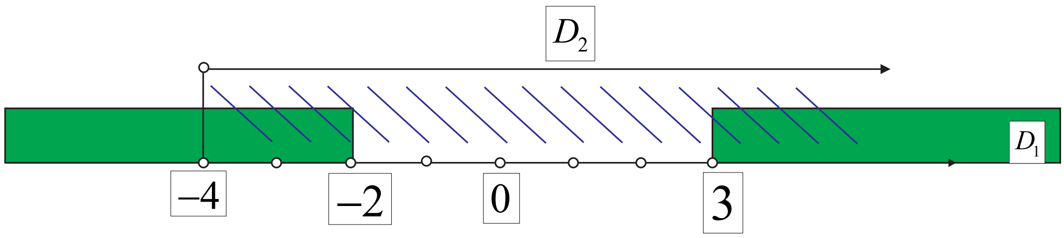
т.е. $x \in (-\infty, -2)$.

Добиваме дека $D_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \frac{x-3}{x+2} > 0 \right\} = (3,\infty) \cup (-\infty,-2)$.

За второто множество имаме $D_2 = \{ x \in \mathbb{R} | x \geq -4 \} = [-4,\infty)$.



Па, добиваме дека $D_f = D_1 \cap D_2 = [(3,\infty) \cup (-\infty,-2)] \cap [-4,\infty) = [-4,-2) \cup (3,\infty)$. Истото може да се види и од цртежот:



6.2. Парност и нули на функција од реална променлива

За функцијата $f: X \to Y$ ќе велиме дека е:

1) парна, ако за сите $x \in X$ важи $f(-x) = f(x)$,

2) непарна, ако за сите $x \in X$ важи $f(-x) = f(x)$.

Парните функции имаат график $\Gamma_f = \{ (x, f(x)) | x \in X \}$ којшто е осно симетричен во однос на оската $x = 0$. Од друга страна, графикот на непарните функции е централно симетричен во однос на координатниот почеток.

Нека е дадена функцијата $f: X \to Y$, каде $X \subseteq \mathbb{R}$. За точката $x_0 \in X$ ќе велиме дека е нула за функцијата f ако $f(x_0)=0$.

Задача 1. Да се испита парноста на функциите:

а) $f(x)=\dfrac{3x^2}{4-x^2}$; б) $f(x)=2^x+2^{-x}+2x^2$;

в) $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; г) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+3x-1}$.

Решение.

а) Нека $f(x)=\dfrac{3x^2}{4-x^2}$ и $x \in D_f=\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$. Од $f(-x)=\dfrac{3(-x)^2}{4-(-x)^2}=\dfrac{3x^2}{4-x^2}=f(x)$, добиваме дека функцијата f е парна.

б) Нека $f(x)=2^x+2^{-x}+2x^2$ и нека $x \in D_f=\mathbb{R}$. Од

$$f(-x)=2^{(-x)}+2^{-(-x)}+2(-x)^2=2^{-x}+2^x+2x^2=2^x+2^{-x}+2x^2=f(x),$$

добиваме дека f е парна функција.

в) Нека $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

За дефиниционата област имаме: за $x \geq 0$ секогаш важи $x+\sqrt{x^2+1}>0$. Користејќи дека при $x \geq 0$, $x+\sqrt{x^2+1}>0 \Leftrightarrow x>-\sqrt{x^2+1}$, за $x \leq 0$ имаме $-x \geq 0$, па $-x>-\sqrt{(-x)^2+1} \Leftrightarrow x<\sqrt{x^2+1}$, што е секогаш точно. Добиваме $D_f=\mathbb{R}$. Од

$$f(-x)=\log\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\log\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=$$

$$=\log\left(\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{-x-\sqrt{x^2+1}}{-x-\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\log\left(\frac{x^2-\left(x^2+1\right)}{-x-\sqrt{x^2+1}}\right)=\log\left(\frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}}\right)=\log\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}=-\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x).$$

Значи, f е непарна функција.

г) Нека $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+3x-1}$. За да определиме дефинициона област, треба прво да ги најдеме решенијата на равенката $x^2+3x-1=0$. Тие се $x_{1/2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2+4}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$, па имаме $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Нека $x\in D_f$. Тогаш

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+2(-x)}{(-x)^2+3(-x)-1}=\frac{x^2-2x}{x^2-3x-1},\ -f(x)=-\frac{x^2+2x}{x^2+3x-1}.$$

Забележуваме дека, во општ случај, $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. На пример, ако избереме $x=1$:

$f(-1)=\dfrac{(-1)^2+2(-1)}{(-1)^2+3(-1)-1}=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{1}{3}$ и $f(1)=\dfrac{1^2+2\cdot 1}{1^2+3\cdot 1-1}=\dfrac{3}{3}=1$, па $f(-1)=\dfrac{1}{3}\neq f(1)=1$ и $f(-1)=\dfrac{1}{3}\neq -f(1)=-1$. Значи, функцијата f не е ниту парна ниту непарна.

Задача 2. Да се најдат реалните нули на функцијата:

а) $f(x)=2+3x-x^2$; б) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}$;

в) $f(x)=2^{x-1}-1$; г) $f(x)=\log_3(x-2)-1$.

Решение.

а) Бараме точки од доменот $D_f=\mathbb{R}$ за коишто $f(x)=0$, односно $2+3x-x^2=0$. Последната равенка (множејќи ја со -1) е еквивалентна со квадратната равенка $x^2-3x-2=0$. Нејзините решенија се:

$$x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2+4\cdot 2}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Добиваме дека нулите на функцијата се $x_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

б) Дефиниционата област на функцијата f е $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. За нулите имаме:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{4-x^2}{x}=0\Leftrightarrow 4-x^2=0\Leftrightarrow(2-x)(2+x)=0.$$

Следува дека нули на функцијата се $x_1=-2,\ x_2=2$.

в) За $x \in D_f = \mathbb{R}$, бараме да важи:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2^{x-1}-1=0 \Leftrightarrow 2^{x-1}=1 \Leftrightarrow 2^{x-1}=2^0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

Следува дека функцијата има една нула $x_1=1$.

г) Прво, за да најдеме дефинициона област треба $x-2>0$, односно $x>2$, па $D_f=(2,\infty)$. Сега имаме:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \log_3\left(x-2\right)-1=0 \Leftrightarrow \log_3\left(x-2\right)=1.$$

Ако го користиме фактот дека $\log_3 3=1$, добиваме:

$$\log_3\left(x-2\right)=\log_3 3 \Leftrightarrow x-2=3 \Leftrightarrow x=5.$$

Конечно, точката $x_1=5$ е единствена нула на функцијата f.

6.3. Скицирање графици на функции со користење на графиците на елементарните функции

Нека ни е познат графикот $\Gamma=\left\{\left(x,f(x)\right)\middle| x\in D_f\right\}$ на функцијата $y=f(x)$. Тогаш:

1) Графикот Γ_1 на функцијата $y=-f(x)$ е симетричен на Γ во однос на x-оската.

2) Графикот Γ_1 на функцијата $y=f(-x)$ е симетричен на Γ во однос на y-оската.

3) Графикот Γ_1 на функцијата $y=f(x)+c$ се добива со поместување на графикот Γ по правец на y- оската, и тоа: ако $c>0$, поместувањето е за c единици нагоре, а ако $c<0$, поместувањето е за $-c$ единици надолу.

4) Графикот Γ_1 на функцијата $y=f(x+d)$ се добива со поместување на графикот Γ по правец на x- оската, и тоа: ако $d>0$, поместувањето е за d единици на лево, а ако $d<0$, поместувањето е за $-d$ единици на десно.

5) Графикот Γ_1 на функцијата $y=\left|f(x)\right|$ се добива од графикот Γ така што графикот Γ_1 се состои од позитивните вредности на графикот Γ и симетричните точки, во однос на x- оската, на негативните вредности на графикот Γ.

6) Графикот Γ_1 на функцијата $y=f^{-1}(x)$ е симетричен на графикот Γ во однос на правата $y=x$, која што е симетралата на првиот и третиот квадрант.

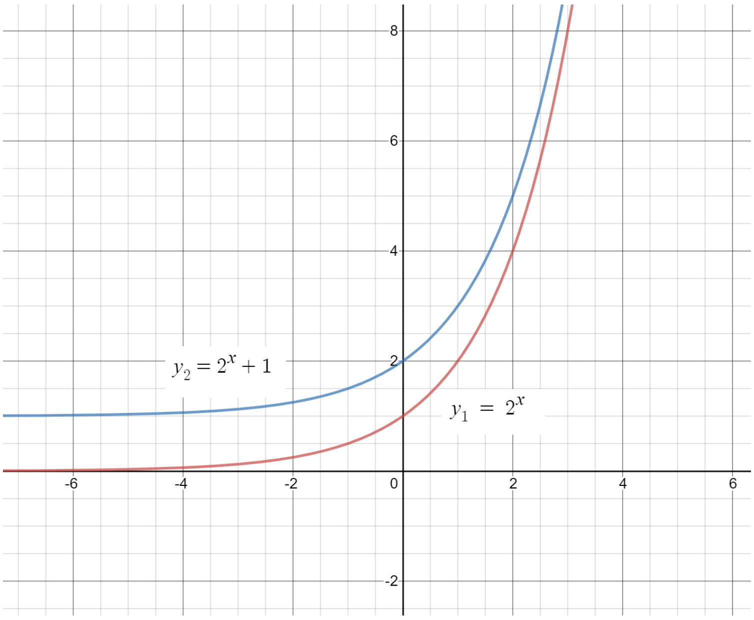
Задача 1. Со помош на графиците на елементарните функции да се скицира графикот на функцијата $y=2^x+1$.

Решение. Треба последователно да се скицираат графиците на функциите:

$y_1=2^x$

$y_2=2^x+1$.

Се добива:



Задача 2. Со помош на графиците на елементарните функции да се скицира графикот на функцијата $y=(x-1)^2+2$.

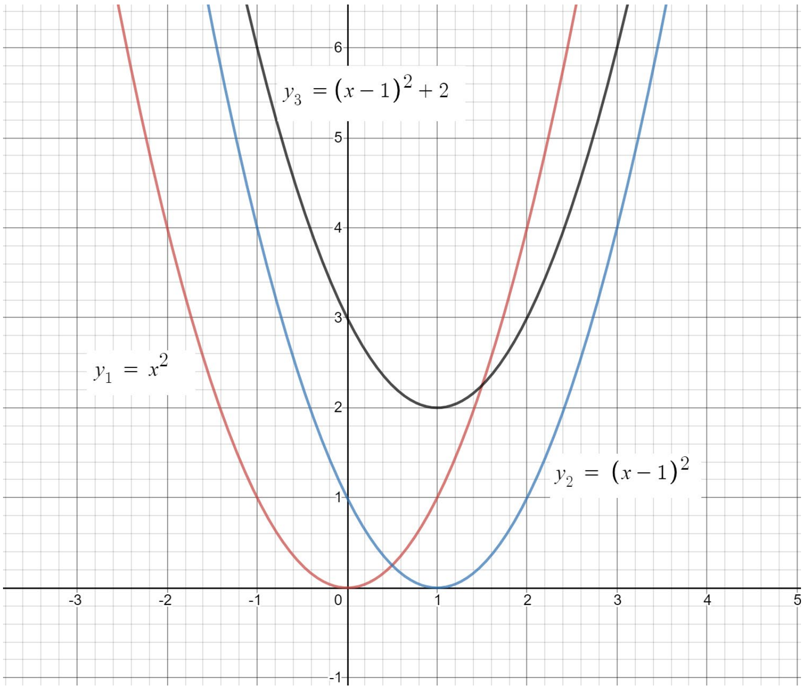
Решение. Графиците што треба да се скицираат последователно се:

$y_1=x^2$

$y_2=\left(x-1\right)^2$

$y_3=\left(x-1\right)^2+2$,

Се добива:



Задача 3. Со помош на графиците на елементарните функции да се скицира графикот на функцијата $y = \left|\ln(x+3)\right| + 2$.

Решение. Графиците што треба да се скицираат се:

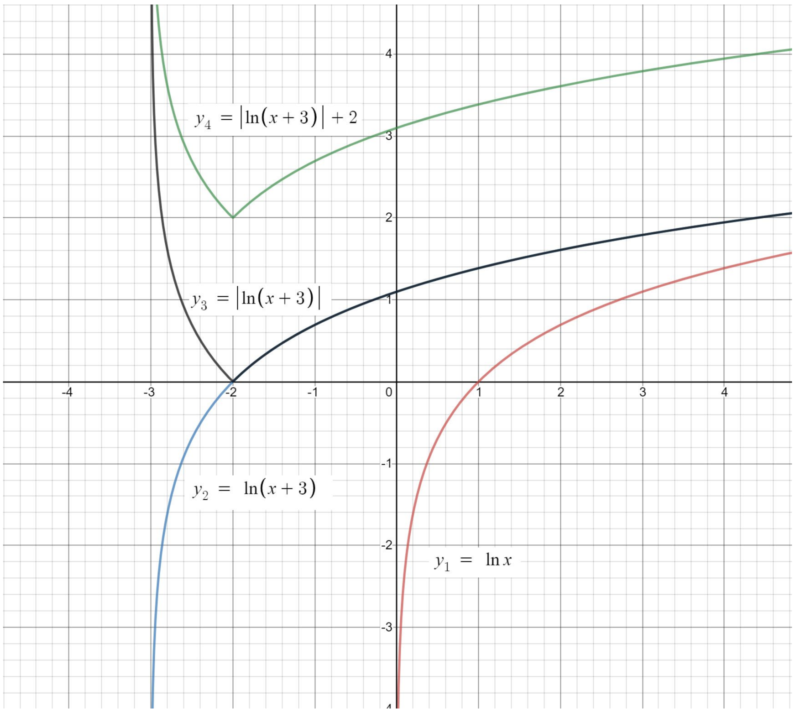
$$y_1 = \ln x$$

$$y_2 = \ln\left(x+3\right)$$

$$y_3 = \left|\ln\left(x+3\right)\right|$$

$$y_4 = \left|\ln\left(x+3\right)\right| + 2.$$

Се добива:



Задача 4. Со помош на графиците на елементарните функции да се скицира графикот на функцијата $y = \left(e^{-x} + 3\right)^{-1}$.

Решение. Графиците што треба да се скицираат се:

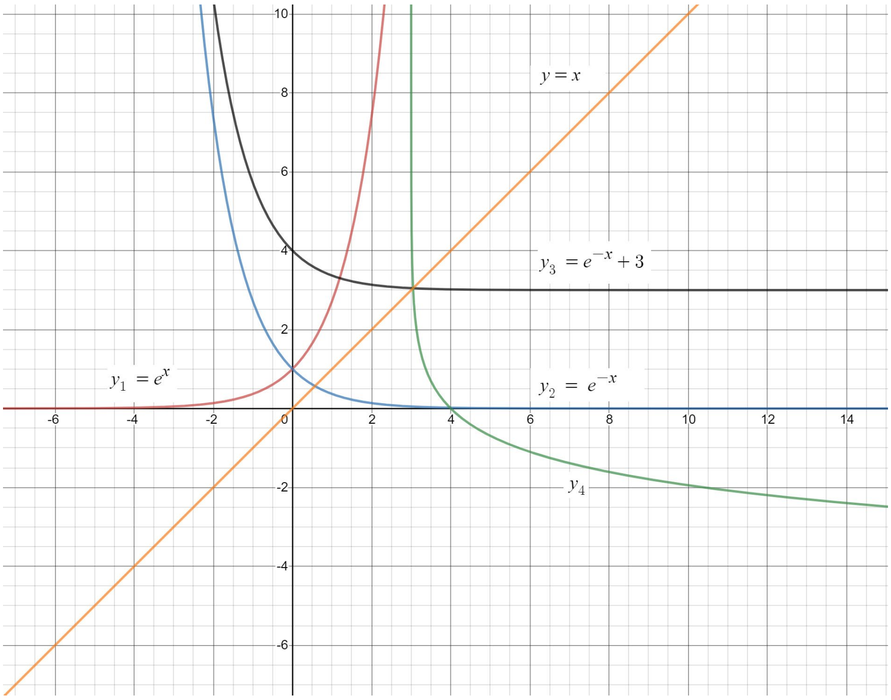
$y_1 = e^x$

$y_2 = e^{-x}$

$y_3 = e^{-x} + 3$

$y_4 = \left(e^{-x} + 3\right)^{-1}$.

Се добива:



6.4. Гранична вредност на функција

Во задачите 1-15 од овој дел, барањето е да се определи граничната вредност на дадената функција $f(x)$ во дадена точка $x = a$, па за да нема повторување на истиот текст, во поставувањето на задачите ќе стои само $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)$. (Често, заради поедноставен запис, наместо $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)$ ќе пишуваме $\lim_{x\to a} f(x)$, но притоа внимаваме да ја користиме втората ознака т.е. само кога истата не прави различно толкување од даденото.)

Задача 1. $\lim_{x\to 2}(5x^2 - 2x + 3)$.

Решение. $\lim_{x\to 2}(5x^2 - 2x + 3) = 5\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 3 = 5\cdot 4 - 4 + 3 = 19$.

Задача 2. $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{x-6}$.

Решение. $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{x-6} = \frac{3+5}{3-6} = \frac{8}{(-3)} = -\frac{8}{3}$.

Задача 3. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+5)}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{0+5}{3}=\dfrac{5}{3}$.

Задача 4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x-9}$.

Решение. Прво ќе ги најдеме решенијата на равенката $x^2-5x+6=0$:

$$x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2},\text{ т.е. } x_1=\frac{5-1}{2}=2,\ x_2=\frac{5+1}{2}=3.$$

Оттука имаме $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, па за лимесот добиваме

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{3(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x+6}{x^2-16}-\dfrac{x+1}{x^2-4x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x+6}{x^2-16}-\frac{x+1}{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x+6}{x^2-4^2}-\frac{x+1}{x(x-4)}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x+6}{(x-4)(x+4)}-\frac{x+1}{x(x-4)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x(x+6)-(x+4)(x+1)}{x(x-4)(x+4)}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x^2+6x-x^2-4x-x-4}{x(x-4)(x+4)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x-4}{x(x-4)(x+4)}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{1}{x(x+4)}\right]=\frac{1}{4\cdot 8}=\frac{1}{32}.$$

Задача 6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}\right)$.

Решение. Решенијата на равенката $x^2+6x-7=0$ се:

$$x_{1/2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2+4\cdot 7}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2},\text{ т.е. } x_1=-7, x_2=1,$$

па

$$x^2+6x-7=(x+7)(x-1).$$

Од друга страна, за решенијата на $x^2-5x+4=0$ добиваме:

$$x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 4}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}, \text{ т.е. } x_1=4, x_2=1,$$

па

$$x^2-5x+4=(x-4)(x-1).$$

За лимесот добиваме

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x+7)(x-1)}{(x-4)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{x-4}=\frac{1+7}{1-4}=-\frac{8}{3}.$$

Задача 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-7x+4}{3x^3+3x^2-x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-7x+4}{3x^3+3x^2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3-7x+4):x^3}{(3x^3+3x^2-x):x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3-7x+4}{x^3}}{\frac{3x^3+3x^2-x}{x^3}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-7\frac{x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{3+3\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{7}{x^2}^{\nearrow 0}+\frac{4}{x^3}^{\nearrow 0}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{3}{x}^{\nearrow 0}-\frac{1}{x^2}^{\nearrow 0}\right)}=\frac{2-0+0}{3+0-0}=\frac{2}{3}.$$

Задача 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right):x}{(2x+3):x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{\frac{2x+3}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\dfrac{\sqrt{1+0}}{2+0}=\dfrac{1}{2}.$

Задача 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-1-\sqrt{x^2+x-1}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-1-\sqrt{x^2+x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-1-\sqrt{x^2+x-1}\right)\cdot\frac{x-1+\sqrt{x^2+x-1}}{x-1+\sqrt{x^2+x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2-\left(x^2+x-1\right)}{x-1+\sqrt{x^2+x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2-x+1}{x-1+\sqrt{x^2+x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-3x+2):x}{\left(x-1+\sqrt{x^2+x-1}\right):x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-3x+2}{x}}{\frac{x-1+\sqrt{x^2+x-1}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x^2+x-1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\frac{-3+0}{1-0+\sqrt{1+0-0}}=-\frac{3}{2}.$$

Задача 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{x\cdot\frac{3}{3}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=e^3$.

Задача 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2\cdot(x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2+1}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{(x^2+1)\cdot\frac{x^2}{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}\right]^{\frac{x^2}{x^2+1}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2:x^2}{\left(x^2+1\right):x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}=e^1=e.$$

Задача 12. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin(5x)}{2x}\right]$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(5x)}{2x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(5x)}{2x}\cdot\frac{5}{5}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\frac{5}{2}\right]=\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(5x)}{5x}\right]=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}.$$

Задача 13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Задача 14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{3}{5}\right)=$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin(5x)}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}}=\frac{3}{5}.$$

Задача 15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}\underset{\substack{x-1=t\\ x=t+1\\ x\to 1\Leftrightarrow t\to 0}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t(t+2)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+2}=1\cdot\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}.$$

Задача 16. Да се определат левата и десната граница кај точките на прекин за функциите:

а) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$

Решение. Функцијата f има само една точка на прекин и тоа $x_1=-1$. Ќе определиме лев и десен лимес на функцијата во точката x_1.

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}e^{\frac{1}{x+1}}=\begin{bmatrix}x=-1-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0\end{bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}e^{\frac{1}{-1-\varepsilon+1}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}e^{\frac{1}{-\varepsilon}}=e^{\frac{1}{-0^+}}=e^{\frac{1}{0^-}}=e^{-\infty}=0,$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}e^{\frac{1}{x+1}}=\begin{bmatrix}x=-1+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0\end{bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}e^{\frac{1}{-1+\varepsilon+1}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}e^{\frac{1}{\varepsilon}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{+\infty}=+\infty.$$

б) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$

Решение. Дадената функција има прекин само во точката $x_1=1$. За лева и десна граница во x_1 имаме:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x-1}=\begin{bmatrix} x=1-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0\end{bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2}{1-\varepsilon-1}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2}{-\varepsilon}=\frac{2}{-0^+}=\frac{2}{0^-}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1}=\begin{bmatrix} x=1+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0\end{bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2}{1+\varepsilon-1}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2}{\varepsilon}=\frac{2}{0^+}=+\infty.$$

1) Правата $x=a$ велиме дека е вертикална асимптота за функцијата $y=f(x)$ ако:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)\in\{-\infty,\infty\} \text{ или } \lim_{x\to a^+} f(x)\in\{-\infty,\infty\}.$$

2) Правата $y=b$ велиме дека е хоризонтална асимптота за функцијата $y=f(x)$ ако:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b\ .$$

3) Правата $y=kx+n$ велиме дека е коса асимптота за функцијата $y=f(x)$ ако постојат лимесите:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Задача 17. Да се определат асимптотите на функцијата:

а) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$

Решение. Функцијата има прекин во точката $x_1=\dfrac{1}{2}$. Да определиме лев и десен лимес во точката x_1 за да ги најдеме вертикалните асимптоти.

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{x+1}{2x-1}=\begin{bmatrix} x=\frac{1}{2}-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0\end{bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}-\varepsilon+1}{2\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)-1}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}-\varepsilon}{1-2\varepsilon-1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}-\varepsilon}{-2\varepsilon}=\frac{\frac{3}{2}}{-2\cdot 0^+}=\frac{\frac{3}{2}}{0^-}=\frac{1.5}{0^-}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{x+1}{2x-1}=\begin{bmatrix}x=\frac{1}{2}+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0\end{bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}+\varepsilon+1}{2\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)-1}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}+\varepsilon}{1+2\varepsilon-1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}+\varepsilon}{+2\varepsilon}=\frac{\frac{3}{2}}{2\cdot 0^+}=\frac{\frac{3}{2}}{0^+}=\frac{1.5}{0^+}=+\infty$$

Од каде добиваме дека $x=\frac{1}{2}$ е вертикална асимптота.

За хоризонтална асимптота го бараме следниот лимес:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1\ :x}{2x-1:x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{1}{2},$$

Гледаме дека лимесот е ист и за $x\to\infty$ и $x\to-\infty$, односно имаме дека правата $y=\frac{1}{2}$ е хоризонтална асимптота за функцијата f.

Штом има хоризонтална асимптота, функцијата f не може да има коса асимптота.

б) $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$

Решение. Да бараме лев и десен лимес во точката на прекин $x_1=-1$:

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+2x+3}{x+1}=\begin{bmatrix}x=-1-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0\end{bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(-1-\varepsilon)^2+2(-1-\varepsilon)+3}{-1-\varepsilon+1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(-1-\varepsilon)^2+2(-1-\varepsilon)+3}{-\varepsilon}=\frac{(-1)^2+2(-1)+3}{-0^+}=\frac{1-2+3}{0^-}=\frac{2}{0^-}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+2x+3}{x+1}=\begin{bmatrix}x=-1+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0\end{bmatrix}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(-1+\varepsilon)^2+2(-1+\varepsilon)+3}{-1+\varepsilon+1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(-1+\varepsilon)^2+2(-1+\varepsilon)+3}{\varepsilon}=\frac{(-1)^2+2(-1)+3}{0^+}=\frac{1-2+3}{0^+}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

Од тоа што степенот на броителот е повисок од именителот имаме дека нема да постои лимесот $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, па функцијата нема хоризонтална асимптота.

За коса асимптота имаме:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+2x+3}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2+x}\frac{:x^2}{:x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3-x^2-x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=1$$

т.е. правата $y=x+1$ е коса асимптота за функцијата f.

7. Извод на функција од реална променлива

7.1. Пресметување изводи со помош на табличните изводи и правилата за диференцирање збир и разлика од функции и производ на функција со константа

Таблични изводи:

1) $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$, каде $\alpha\in\mathbb{R}$,

2) $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$, каде $a>0$,

3) $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$,

4) $\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$,

5) $\left(\sin x\right)'=\cos x$,

6) $\left(\cos x\right)'=-\sin x$,

7) $\left(tgx\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$,

8) $\left(ctgx\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$,

9) $\left(arctgx\right)'=\frac{1}{1+x^2}$,

10) $\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ако u,v се функции од реална променлива кои имаат извод и $c\in\mathbb{R}$, тогаш:

1) $(const)'=0$;

2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

3) $(cu)'=cu'$.

Во задачите 1 - 9 од овој дел, барањето е да се определи изводот на дадената функција $y=f\left(x\right)$, па за да нема повторување на истиот текст, во поставувањето на задачите ќе стои само $y=f\left(x\right)$.

Задача 1. $y=11$.

Решение. $y'=11'=0$.

Задача 2. $y=-2x$.

Решение. $y'=\left(-2x\right)'=-2x'=-2\cdot 1\cdot x^{1-1}=-2\cdot x^0=-2$.

Задача 3. $y=3x^2$.

Решение. $y'=\left(3x^2\right)'=3\cdot 2\cdot x^{2-1}=6\cdot x^1=6x$.

Задача 4. $y=4x^2+2x-4$.

Решение. $y'=\left(4x^2+2x-4\right)'=\left(4x^2\right)'+\left(2x\right)'-4'=8x+2$.

Задача 5. $y=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$.

Решение. $y'=\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)'=1-\frac{1}{2}\cdot 2x-\frac{1}{3}3x^2+\frac{1}{4}4x^3=1-x-x^2+x^3$.

Задача 6. $y=\frac{3x^5+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение.

$$y'=\left(\frac{3x^5+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'=\left(\frac{3x^5}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'=3\left(\frac{x^5}{x^{\frac{2}{3}}}\right)'+\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)'=3\left(x^{5-\frac{2}{3}}\right)'+\left(x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\right)'=$$

$$=3\left(x^{\frac{13}{3}}\right)'+\left(x^{-\frac{1}{6}}\right)'=3\cdot\frac{13}{3}\cdot x^{\frac{13}{3}-1}-\frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{1}{6}-1}=13x^{\frac{10}{3}}-\frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{7}{6}}.$$

Задача 7. $y=\sqrt{2\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

Решение.

$$y'=\left(\sqrt{2\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'=\left(\left(2\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(\left(2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=\left(\left(2x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(\sqrt{2}x^{\frac{3}{8}}\right)'=\sqrt{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot x^{\frac{3}{8}-1}=\frac{3\sqrt{2}}{8}x^{-\frac{5}{8}}.$$

Задача 8. $y=\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

$$y'=\left(\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(\frac{1-2\sqrt{x}+x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)'=\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)'=$$

$$=\left(x^{-\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}+x^{1-\frac{1}{3}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'-2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)'+\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}-2\cdot\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1}+\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{6}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Задача 9. $y=x^2-\sin x+e^x$.

Решение. $y'=\left(x^2-\sin x+e^x\right)'=\left(x^2\right)'-\left(\sin x\right)'+\left(e^x\right)'=2x-\cos x+e^x$.

7.2. Извод од производ и количник на функции

Ако u, v се функции од реална променлива кои имаат извод, тогаш:

1) $(uv)' = u'v + uv'$;

2) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$.

Во задачите 1-4 од овој дел, барањето е да се определи изводот на дадената функција $y = f\left(x\right)$, па за да нема повторување на истиот текст, во поставувањето на задачите ќе стои само $y = f\left(x\right)$.

Задача 1. $y = x \sin x$.

Решение.

$$y' = \left(x \sin x\right)' = x' \sin x + x\left(\sin x\right)' = \sin x + x \cos x.$$

Задача 2. $y = e^x (2x^2 + x - 3)$

Решение.

$$y' = \left(e^x (2x^2 + x - 3)\right)' = \left(e^x\right)'(2x^2 + x - 3) + \left(e^x\right)(2x^2 + x - 3)' =$$

$$= e^x (2x^2 + x - 3) + e^x \left(4x + 1\right) = e^x \left(2x^2 + x - 3 + 4x + 1\right) = e^x \left(2x^2 + 5x - 2\right).$$

Задача 3. $y = \dfrac{5x - 2}{4x + 7}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{5x - 2}{4x + 7}\right)' = \frac{\left(5x - 2\right)'\left(4x + 7\right) - \left(5x - 2\right)\left(4x + 7\right)'}{\left(4x + 7\right)^2} =$$

$$= \frac{5\left(4x + 7\right) - \left(5x - 2\right) \cdot 4}{\left(4x + 7\right)^2} = \frac{20x + 35 - 20x + 8}{\left(4x + 7\right)^2} = \frac{43}{\left(4x + 7\right)^2}.$$

Задача 4. $y = \dfrac{\ln x \cdot \sin x}{x^2}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{\ln x \cdot \sin x}{x^2}\right)' = \frac{(\ln x \cdot \sin x)' x^2 - (\ln x \cdot \sin x)\left(x^2\right)'}{x^4} =$$

$$= \frac{\left[(\ln x)' \sin x + (\ln x)(\sin x)'\right] x^2 - (\ln x \cdot \sin x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{\left[\frac{1}{x}\sin x + \ln x \cdot \cos x\right] x^2 - (\ln x \cdot \sin x) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{x}\sin x + \ln x \cdot \cos x\right] x - 2\ln x \cdot \sin x}{x^3} = \frac{\sin x + x\ln x \cdot \cos x - 2\ln x \cdot \sin x}{x^3}.$$

7.3. Извод од сложена функција. Извод од втор ред

Ако u, v се функции од реална променлива кои имаат извод и $y = v(u(x))$, тогаш $y'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$.

Втор извод на функцијата $y = f(x)$ се дефинира со $y'' = (y')' = (f'(x))'$.

Во задачите 1 - 6 од овој дел, барањето е да се определи изводот на дадената функција $y = f(x)$, па за да нема повторување на истиот текст, во поставувањето на задачите ќе стои само $y = f(x)$.

Задача 1. $y = (5x-3)^7$.

Решение. Имаме:

$$u(x) = 5x - 3 \Rightarrow u'(x) = (5x-3)' = 5;$$

$$v = u^7 \Rightarrow v'(u) = 7u^6 = 7(5x-3)^6.$$

Според формулата за извод на сложена функција добиваме

$$y' = v'(u(x)) \cdot u'(x) = 7(5x-3)^6 \cdot 5 = 35(5x-3)^6.$$

Задача 2. $y = x^2 + 1 - \sqrt{9 - x^2}$.

Решение. $y' = \left(x^2 + 1 - \sqrt{9-x^2}\right)' = 2x - \left(\sqrt{9-x^2}\right)'$. За изводот $\left(\sqrt{9-x^2}\right)'$, имаме:

$$u(x) = 9 - x^2 \Rightarrow u'(x) = \left(9 - x^2\right)' = -2x,$$

$$v=\sqrt{u} \Rightarrow v'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}.$$

Па, од правилото за извод на сложена функција, добиваме

$$\left(\sqrt{9-x^2}\right)'=v'(u(x))\cdot u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Конечно, $y'=2x+\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

Задача 3. $y=e^{2x+1}$.

Решение. Од

$$u(x)=2x+1 \Rightarrow u'(x)=(2x+1)'=2,$$

$$v=e^u \Rightarrow v'(u)=e^u=e^{2x+1},$$

добиваме $y'=v'(u)\cdot u'=2e^{2x+1}$.

Задача 4. $y=e^{\sin x}$.

Решение. Од

$$u(x)=\sin x \Rightarrow u'(x)=(\sin x)'=\cos x,$$

$$v=e^u \Rightarrow v'(u)=e^u=e^{\sin x},$$

добиваме $y'=v'(u)\cdot u'=\cos x e^{\sin x}$.

Задача 5. $y=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Решение. Од

$$u(x)=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow u'(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2},$$

$$v=\ln u \Rightarrow v'(u)=(\ln u)'=\frac{1}{u}=\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{x+1}{x-1},$$

имаме $y'=v'(u)\cdot u'=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$.

Задача 6. $y = x^3 e^{x^2}$.

Решение. Прво ќе користиме правило за производ:

$$y' = \left(x^3 e^{x^2}\right)' = \left(x^3\right)'\left(e^{x^2}\right) + \left(x^3\right)\left(e^{x^2}\right)' = 3x^2 e^{x^2} + x^3\left(e^{x^2}\right)'.$$

За изводот $\left(e^{x^2}\right)'$ имаме:

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = \left(x^2\right)' = 2x,$$

$$v = e^u \Rightarrow v'(u) = e^u = e^{x^2},$$

па $\left(e^{x^2}\right)' = v'(u) \cdot u' = 2xe^{x^2}$ и $y' = 3x^2 e^{x^2} + x^3 \cdot 2xe^{x^2} = 3x^2 e^{x^2} + 2x^4 e^{x^2} = x^2 e^{x^2}\left(3 + 2x^2\right)$.

Задача 7. Да се најде вториот извод на функцијата $y = 5x^2 - 7x + 2$.

Решение. Прво ќе го определиме изводот:

$$y' = \left(5x^2 - 7x + 2\right)' = 10x - 7.$$

Сега ако побараме уште еднаш извод на функцијата y', добиваме втор извод:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(10x - 7\right)' = 10.$$

Задача 8. Да се најде вториот извод на функцијата $y = \dfrac{4x}{1 + x^2}$.

Решение. За изводот имаме

$$y' = \left(\frac{4x}{1 + x^2}\right)' = \frac{(4x)'\left(1 + x^2\right) - 4x\left(1 + x^2\right)'}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{4\left(1 + x^2\right) - 4x \cdot 2x}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{4 - 4x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}.$$

Па, за вториот извод добиваме:

$$y'' = \left(\frac{4 - 4x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}\right)' = \frac{\left(4 - 4x^2\right)'\left(1 + x^2\right)^2 - \left(4 - 4x^2\right)\left(\left(1 + x^2\right)^2\right)'}{\left(1 + x^2\right)^4}.$$

Јасно е дека $\left(4 - 4x^2\right)' = -8x$, а за изводот $\left(\left(1 + x^2\right)^2\right)'$ имаме:

$$u(x)=1+x^2 \Rightarrow u'(x)=\left(1+x^2\right)'=2x,$$

$$v=u^2 \Rightarrow v'(u)=2u=2\left(1+x^2\right),$$

па $\left(\left(1+x^2\right)^2\right)'=4x\left(1+x^2\right)$.

Заменуваме во $y"$ и добиваме:

$$y"=\left(\frac{4-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)'=\frac{-8x\left(1+x^2\right)^2-\left(4-4x^2\right)4x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(1+x^2\right)\left[-8x\left(1+x^2\right)-16x+16x^3\right]}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{8x^3-24x}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{8x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

7.4. Тангента и нормала на крива и примена на извод во наоѓање апроксимативни вредности

Равенката на тангентата на графикот на функцијата $f:D_f \to \mathbb{R}$ во точката $\left(x_0, f(x_0)\right)$ гласи

$$t: y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

а нормалата што минува низ истата точка има равенка

$$n: y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Од дефиницијата за извод на функција во дадена точка ја имаме апроксимацијата:

$$f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\approx f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Задача 1. Да се најде равенката на тангентата и нормалата на $f(x)=(2x+1)\sqrt{2-x}$ во точката $M(1,3)$.

Решение. Прво ќе најдеме извод на функцијата:

$$f'(x)=\left((2x+1)\sqrt{2-x}\right)'=(2x+1)'\sqrt{2-x}+(2x+1)\left(\sqrt{2-x}\right)'=2\sqrt{2-x}-\frac{2x+1}{2\sqrt{2-x}}.$$

(За изводот $\left(\sqrt{2-x}\right)'$ користиме правило за сложена функција:

$$u(x)=2-x \Rightarrow u'(x)=\left(2-x\right)'=-1,$$

$$v=\sqrt{u} \Rightarrow v'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2\sqrt{2-x}},$$

од каде следува дека $\left(\sqrt{2-x}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$.)

Да ја определиме сликата на изводот во точката $x_0=1$:

$$f'(1)=2\sqrt{2-1}-\frac{2\cdot 1+1}{2\sqrt{2-1}}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

Од тоа што за $x_0=1$ следува $y_0=y(1)=3$, па имаме дека точката $M(1,3)$ лежи на графикот на функцијата $y=f(x)$. Тангентата и нормалата низ таа точка ги имаат следните равенки:

$$t: y-3=\frac{1}{2}(x-1),$$

$$n: y-3=-2(x-1).$$

Задача 2. Пресметај приближно $\sqrt[3]{26.19}$ со помош на извод.

Решение. Од дефиницијата за извод на функција во дадена точка ја имаме апроксимацијата:

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Од дадениот израз се добива дека $26.19=\Delta x+x_0$ и $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Вредноста x_0 ја избираме да биде најблискиот цел број до 26.19 чијшто трет корен е цел број, па во нашиот случај $x_0=27$ и $f(x_0)=\sqrt[3]{27}=3$, а $\Delta x=26.19-x_0=26.19-27=-0.81$.

Останува да се определи изводот на f во точката x_0:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f'(27)=\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{3\cdot 9}=\frac{1}{27}.$$

Конечно, имаме $\sqrt[3]{26.19}\approx 3+\frac{1}{27}\left(-0.81\right)=2.97$.

7.5. Лопиталово правило

Ако $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ е некој од неопределените изрази $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ или $\dfrac{0}{0}$, а функциите $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ имаат извод во точката $x=a$, тогаш:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Наведеното својство е познато под името Лопиталово правило (ЛП).

Во задачите 1 - 7 од овој дел, барањето е да се определи граничната вредност на дадената функција $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ во точката $x=a$ со користење на Лопиталовото правило (ЛП), па за да нема повторување на истиот текст, во поставувањето на задачите ќе стои само $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}\underset{ЛП}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin 5x\right)'}{\left(3x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 5x}{3}=\dfrac{5\cos 0}{3}=\dfrac{5}{3}$.

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}\underset{ЛП}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)'}{\left(\ln x\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}x=1$.

Задача 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}\underset{ЛП}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x\right)'}{\left(e^x-1\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{e^0}=1$.

Задача 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{ЛП}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(x-x\cos x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{ЛП}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x+x\sin x)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x+x\cos x}{\sin x}=$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{ЛП}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x+x\cos x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=\frac{2+1-0}{1}=3.$$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{ЛП}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Задача 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{ЛП}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}xe^x=\infty$.

Задача 7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{ЛП}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(xe^x-x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}=$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{ЛП}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x+xe^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{1+1+0}=\frac{1}{2}.$$

7.6. Испитување монотоност, екстреми и конкавност/конвексност на функции со помош на изводи

Нека $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ е диференцијабилна функција на интервалот (a,b).

1) f е монотоно растечка на (a,b) ако $f'(x)>0$ за сите $x\in(a,b)$

2) f е монотоно опаѓачка на (a,b) ако $f'(x)<0$ за сите $x\in(a,b)$.

Точката $c\in(a,b)$ е точка на можен екстрем (минимум или максимум) за f ако:

А) Постои $f'(c)$ и $f'(c)=0$.

Притоа:

А1) Ако постои $f''(c)$ и $f''(c)>0$, тогаш f има локален минимум во точката c.

А2) Ако постои $f''(c)$ и $f''(c)<0$, тогаш f има локален максимум во точката c.

А3) Ако не постои $f''(c)$ се испитува знакот на f' во околина на точката c и ако тој знак се менува имаме локален екстрем во c:

Ако знакот на $f'(x)$е позитивен на левата страна од c (за $x<c$) и негативен на десната страна од c (за $x>c$) , тогаш f има локален максимум во c;

Ако знакот на $f'(x)$е негативен на левата страна од c (за $x<c$) и позитивен на десната страна од c (за $x>c$) , тогаш f има локален минимум во c;

Б) Ако не постои $f'(c)$, тогаш се испитува знакот на f' во околина на точката c, како во А3.

Нека $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ е диференцијабилна функција на интервалот (a,b).

1) f е конвексна "$\cap$" на (a,b) ако $f''(x)<0$ за сите $x\in(a,b)$.

2) f е конкавна "$\cup$" на (a,b) ако $f''(x)>0$ за сите $x\in(a,b)$.

Точката $c\in(a,b)$ е превојна точка за f ако $f''(c)=0$ и f'' го менува знакот во околина на точката c.

Задача 1. Да се испита монотоноста за функциите:

а) $f(x)=x^2-2x$; б) $f(x)=7+3x^2-x^3$; в) $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+9x$;

г) $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$; е) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Решение.

а) Прво ќе го определиме изводот f' на функцијата $f(x)=x^2-2x$:

$$f'(x) = \left(x^2 - 2x\right)' = 2x - 2 = 2\left(x-1\right)$$

Знакот на f' зависи од знакот на изразот $\left(x-1\right)$. Бидејќи $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, добиваме дека $f'(x)>0$ за $x>1$ и $f'(x)<0$ за $x<1$. Конечно, добиваме дека функцијата f е монотоно растечка на интервалот $\left(1,\infty\right)$ и е монотоно опаѓачка на $\left(-\infty,1\right)$.

б) За $f(x) = 7 + 3x^2 - x^3$, имаме

$$f'(x) = \left(7 + 3x^2 - x^3\right)' = 6x - 3x^2 = 3x(2-x).$$

За да се испита знакот на $f'(x)$ ќе ја формираме следната табела:

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Заклучуваме дека функцијата f е монотоно растечка на интервалот $(0,2)$ и е монотоно опаѓачка на $\left(-\infty,0\right)\cup\left(2,\infty\right)$.

в) За $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x$ имаме

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 6x + 9 = x^2 - 6x + 9.$$

За да се испита знакот на добиениот израз, прво да ги најдеме нулите на равенката:

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Имаме

$$x_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 9}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3.$$

Следува $x^2-6x+9=(x-3)(x-3)=(x-3)^2$, т.е. $f'(x)=(x-3)^2$. Бидејќи $(x-3)^2>0$ за сите x, добиваме дека f е монотоно растечка функција на $D_f=\mathbb{R}$.

г) За $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ имаме

$$f'(x)=\left(\frac{x+2}{x-3}\right)'=\frac{(x+2)'(x-3)-(x+2)(x-3)'}{(x-3)^2}=$$
$$=\frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}.$$

Добиваме дека изводот е дробно рационален израз со негативен броител -5 и позитивен именител $(x-3)^2$. Односно, $f'(x)<0$ за сите $x\in D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ т.е. f е монотоно опаѓачка функција на $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

е) За $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ имаме

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)'=\frac{(x^2)'(x-1)-(x^2)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Заради тоа што именителот $(x-1)^2$ е секогаш позитивен, имаме:

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Заклучуваме дека f е монотоно растечка функција на $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ и е монотоно опаѓачка функција на $(0,2)$.

Задача 2. Да се најдат екстремните вредности на функциите:

а) $f(x)=x^2-2x+3$; б) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-3}$; в) $f(x)=\dfrac{x^2-7}{x+4}$;

г) $f(x)=\left(2x-1\right)e^{2x}$; е) $f(x)=2x-3x^{\frac{2}{3}}$.

Решение.

а) За функцијата $f(x)=x^2-2x+3$ имаме

$$f'(x)=\left(x^2-2x+3\right)'=2x-2=2\left(x-1\right).$$

За да ги најдеме точките на можни екстреми, ја решаваме равенката $f'(x)=0$, т.е.

$$2\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

За да провериме дали најдената точка е екстрем, ќе побараме втор извод на функцијата, т.е. $f''(x)=\left(2x-2\right)'=2$. Од $f''(1)=2>0$, заклучуваме дека во точката $x=1$ функцијата f достигнува минимум со вредност

$$f(1)=1^2-2\cdot1+3=1-2+3=2.$$

б) За $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-3}$ имаме

$$f'(x)=\left(\frac{2x+2}{x-3}\right)'=\frac{(2x+2)'(x-3)-(2x+2)(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{2(x-3)-(2x+2)}{(x-3)^2}=\frac{-8}{(x-3)^2}.$$

За да ги најдеме точките на можни екстреми, ја решаваме равенката $f'(x)=0$ што е еквивалентно со $\frac{-8}{(x-3)^2}=0$. Последната равенка нема нули, а од друга страна, изводот на функцијата не постои само во точката 3, но таа не припаѓа на дефиниционата област на функцијата, па функцијата f нема екстремни вредности на дефиниционата област $D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

в) За $f(x)=\frac{x^2-7}{x+4}$ имаме

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-7}{x+4}\right)'=\frac{(x^2-7)'(x+4)-(x^2-7)(x+4)'}{(x+4)^2}=$$

$$=\frac{2x(x+4)-(x^2-7)}{(x+4)^2}=\frac{2x^2+8x-x^2+7}{(x+4)^2}=\frac{x^2+8x+7}{(x+4)^2}$$

па

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2+8x+7}{(x+4)^2}=0\Leftrightarrow x^2+8x+7=0$$

За решенијата на равенката имаме:

$$x_{1/2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-8\pm 6}{2}\text{, од каде } x_1=-\frac{14}{2}=-7,\ x_2=-\frac{2}{2}=-1.$$

Значи, точките $x_1=-7,\ x_2=-1$ се точки за можни локални екстреми.

Да го најдеме вториот извод:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+8x+7}{(x+4)^2}\right)'=\frac{(x^2+8x+7)'(x+4)^2-(x^2+8x+7)\left((x+4)^2\right)'}{(x+4)^4}=$$

$$=\frac{(2x+8)(x+4)^2-(x^2+8x+7)2(x+4)}{(x+4)^4}=\frac{2(x+4)^3-(x^2+8x+7)2(x+4)}{(x+4)^4}=$$

$$=\frac{2(x+4)\left[(x+4)^2-x^2-8x-7\right]}{(x+4)^4}=\frac{2(x+4)\left[x^2+8x+16-x^2-8x-7\right]}{(x+4)^4}=$$

$$=\frac{2\cdot 9}{(x+4)^3}=\frac{18}{(x+4)^3}.$$

Од $f''(-7)=\dfrac{18}{(-7+4)^3}<0$ следува дека f достигнува локален максимум $f(-7)=\dfrac{(-7)^2-7}{-7+4}=\dfrac{42}{-3}=-14$ во точката $x_1=-7$, а од $f''(-1)=\dfrac{18}{(-1+4)^3}>0$ следува дека f достигнува локален минимум $f(-1)=\dfrac{(-1)^2-7}{-1+4}=\dfrac{-6}{3}=-2$ во точката $x_2=-1$.

Ова се единствените екстремни вредности за функцијата бидејќи изводот на функцијата постои во сите точки освен во точката -4 која не припаѓа на дефиниционата област на функцијата.

г) За $f(x)=(2x-1)e^{2x}$ имаме

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left((2x-1)e^{2x}\right)'=(2x-1)'e^{2x}+(2x-1)\left(e^{2x}\right)'=2e^{2x}+(2x-1)e^{2x}\cdot 2=\\&=2e^{2x}(1+2x-1)=4xe^{2x},\end{aligned}$$

па

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 4xe^{2x}=0\Leftrightarrow x=0.$$

За вториот извод имаме:

$$f''(x)=\left(4xe^{2x}\right)'=(4x)'e^{2x}+4x\cdot\left(e^{2x}\right)'=4e^{2x}+4x\cdot e^{2x}\cdot 2=4e^{2x}(1+2x).$$

Од $f''(0)=4e^{2\cdot 0}(1+2\cdot 0)=4>0$ следува дека функцијата f има локален минимум $f(0)=(2\cdot 0-1)e^{2\cdot 0}=-e^0=-1$ во точката $x=0$.

е) За $f(x)=2x-3x^{\frac{2}{3}}$ имаме

$$f'(x)=\left(2x-3x^{\frac{2}{3}}\right)'=2-3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}=2-2x^{-\frac{1}{3}}=2-\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}},$$

па

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}}=0\Leftrightarrow 2x^{\frac{1}{3}}-2=0\Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}}=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{x}=1\Leftrightarrow x=1.$$

Дополнително, забележуваме дека изводот не е дефиниран во точката $x=0$ која припаѓа на дефиниционата област на функцијата.

Заклучуваме дека единствени точки за можни екстреми се точките $x_1=0,\ x_2=1$.

Во продолжение, ќе провериме дали во овие точки функцијата има екстремни вредности и ќе ја испитаме нивната природа.

За точката $x_2 = 1$, ќе побараме втор извод. Имаме

$$f''(x) = \left(\frac{2x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}}} \right)' = \left(2 - 2x^{-\frac{1}{3}} \right)' = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{4}{3}}.$$

Од $f''(1) = \frac{2}{3}(1)^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} > 0$ следува дека функцијата f достигнува локален минимум $f(1) = 2 \cdot 1 - 3(1)^{\frac{2}{3}} = 2 - 3 = -1$ во точката $x_2 = 1$.

За да провериме во точката $x_1 = 0$, ќе го испитаме знакот на $f'(x) = \dfrac{2x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}}}$ во околина на $x_1 = 0$.

	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$2x^{\frac{1}{3}} - 2$	$-$		$-$	$\circ$	$+$
$x^{\frac{1}{3}}$	$-$	$\circ$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Забележуваме дека во околина на точката $x_1 = 0$, изводот f' го менува знакот и тоа, тој е позитивен лево од 0 (за $x < 0$), а негативен десно од нула (за $x > 0$), односно функцијата f е монотоно растечка на левата страна на точката, а е монотоно опаѓачка на десната страна. Заклучуваме дека f има локален максимум $f(0) = 0$ во точката $x_1 = 0$.

Задача 3. Најди ги интервалите на конкавност/конвексност и превојните точки за функциите:

а) $f(x) = x^2 - 2x$; б) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$; в) $f(x) = 2x + e^{-x^2}$.

Решение.

а) За функцијата $f(x) = x^2 - 2x$ ќе ги определиме првиот и вториот извод:

$$f'(x) = \left(x^2 - 2x\right)' = 2x - 2,$$

$$f''(x) = \left(2x - 2\right)' = 2.$$

Од $f''(x) = 2 > 0$ за сите $x \in D_f = \mathbb{R}$, следува дека функцијата $f(x) = x^2 - 2x$ е конкавна "$\cup$" на целата реална права.

б) За првиот извод на функцијата $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ имаме

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{(2x)'\left(1+x^2\right) - 2x\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1+x^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2 - 2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

За вториот извод имаме

$$f''(x) = \left(\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)' = \frac{\left(2-2x^2\right)'\left(1+x^2\right)^2 - \left(2-2x^2\right)\left(\left(1+x^2\right)^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{(-4x)\left(1+x^2\right)^2 - \left(2-2x^2\right)2 \cdot \left(1+x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(1+x^2\right)\left[(-4x)\left(1+x^2\right) - 4x\left(2-2x^2\right)\right]}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{(-4x)\left(1+x^2\right) - 4x\left(2-2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{-4x - 4x^3 - 8x + 8x^3}{\left(1+x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{-12x + 4x^3}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

За да ги најдеме кандидатите за превојни точки ја решаваме равенката

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2-3\right) = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x-3\right)\left(x+3\right) = 0.$$

Следува дека точките $x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3$ се можни кандидати за превојни точки. За да ги најдеме интервалите на конкавност/конвексност на функцијата, ќе го испитаме знакот на f'' со табелата:

	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Може да забележиме дека во околина на точките $x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3$ се променува знакот на f''- што значи дека тие точки се превојни точки.

в) За првиот извод на функцијата $f(x) = 2x + e^{-x^2}$ имаме

$$f'(x) = \left(2x + e^{-x^2}\right)' = 2 + \left(e^{-x^2}\right)' = 2 - 2xe^{-x^2};$$

(користевме дека $u = -x^2, v = e^u \Rightarrow u' = -2x, v' = e^u = e^{-x^2},\quad \left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$)

За вториот извод имаме

$$f''(x) = \left(2 - 2xe^{-x^2}\right)' = -2\left(xe^{-x^2}\right)' = -2e^{-x^2} - 2x\left(e^{-x^2}\right)' = -2e^{-x^2} - 2x\left(-2xe^{-x^2}\right) =$$

$$= 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 2e^{-x^2}\left[\left(\sqrt{2}x\right)^2 - 1\right] = 2e^{-x^2}\left(\sqrt{2}x - 1\right)\left(\sqrt{2}x + 1\right).$$

Земајќи го предвид фактот дека $e^{-x^2} > 0$ за сите $x \in \mathbb{R}$ и табелава

	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$\sqrt{2}x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{2}x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

ги добиваме интервалите на конкавност и конвексност, но исто забележуваме и дека точките $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ се превојни точки.

8. Елементи од комбинаторика, веројатност и биостатистика

8.1. Комбинаторика

При наоѓање и броење на сите можни случаи на распоредување на k елементи на дадено множество од n елементи, обично, треба да внимаваме на два моменти: дали редоследот на елементите во распоредот е важен (или е неважен) и дали секој елемент во распоредот се појавува само еднаш (или е дозволено некој/некои елемент/и да се појават повеќе пати во распоредот). Па разликуваме:

А. Редоследот е важен.

А1. *Варијација без повторување*

Секој елемент во распоредот се појавува само еднаш т.е. ниту еден елемент во распоредот не се повторува.

Бројот на варијации на множество од n елементи од класа k без повторување е:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример. Сите варијации без повторување на множеството $\{1,2,3\}$ од класа 2 се: $12,\ 21,\ 13,\ 31,\ 23,\ 32$.

А2. *Варијација со повторување*

Некој/и елемент/и во распоредот се појавуваат повеќе пати т.е. се повторуваат.

Бројот на варијации на множество од n-елементи од класа k со повторување е:

$$\overline{V_n^k} = n^k .$$

Пример. Сите варијации со повторување на множеството $\{1,2,3\}$ од класа 2 се: $11, 12,\ 21,\ 22,\ 13,\ 31,\ 33, 23,\ 32$.

А1'. *Пермутација на n-елементи без повторување*

Бројот на пермутации на n-елементи без повторување е:

$$P_n = n!.$$

Пример. Пермутации на множеството $\{1,2,3\}$ се:

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321.$$

А2'. *Пермутација на n-елементи со повторување*

Бројот на пермутации на n-елементи со повторување е:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

(Притоа, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$)

Б. Редоследот не е важен.

Б1. *Комбинација без повторување*

Секој елемент во распоредот се појавува само еднаш т.е. ниту еден елемент во распоредот не се повторува.

Бројот на комбинации на множество од n-елементи од класа k без повторување е:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример. Сите комбинации без повторување на множеството $\{1,2,3\}$ од класа 2 се:

$12,\ 13,\ 23$.

Б2. *Комбинација со повторување*

Некој/и елемент/и во распоредот се појавуваат повеќе пати т.е. се повторуваат.

Бројот на комбинации на множество од n елементи од класа k со повторување е:

$$\overline{C_n^k} = C_{n-k+1}^k = \binom{n-k+1}{k} = \frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k+1)!}.$$

Пример. Сите комбинации со повторување на множеството $\{1,2,3\}$ од класа 2 се:

$11, 12, \ 13, 22, \ 23, 33$

Некои практични забелешки:

- ако бараме број на случаи кога е исполнет: **(еден услов И друг услов)** најчесто имаме *множење (принцип на производ)*

- ако бараме број на случаи кога е исполнет: **(еден услов ИЛИ друг услов)** најчесто имаме *собирање (принцип на збир)*

- ако имаме избор на луѓе имаме комбинации

- ако имаме формирање на k-цифрени броеви имаме варијации

Задача1. Колку четирицифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4, 5 така што да нема повторување на цифрите? Колку од тие броеви завршуваат со 13?

Решение. Во случајот $n=5, \ \ k=4$.

Бидејќи не се користат сите елементи на даденото множество имаме или варијација или комбинација. При формирање на броевите редоследот е важен бидејќи, на пример, броевите 1234 и 2134 се два различни броја, па значи станува збор за варијација. Во барањето на задачата не е дозволено повторување на цифрите, па значи имаме варијација без повторување. Следствено, бројот е

$$V_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120.$$

Да најдеме колку броеви завршуваат со 13. Ги бараме броевите од облик:

$$\underbrace{\underline{*}\,\underline{*}}_{2,4,5}\ \underline{1}\,\underline{3}$$

Останува да изброиме на колку начини може да ги распоредиме цифрите $2,4,5$ на првите 2 места, а тоа претставува, повторно, пресметување на број на варијации без повторување, но во овој случај, од 3 елементи од класа 2 т.е.

$$V_3^2=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3!}{1!}=\frac{3\cdot2\cdot1}{1}=6.$$

Задача 2. На една полица има 15 добри и 5 лоши производи.

а) На колку начини може да се изберат 4 добри производи?

б) На колку начини може да се изберат 4 добри производи и 3 лоши производи?

Решение.

а) Бараме на колку начини од 15 добри производи може да избереме 4. Бидејќи при изборот, редоследот на производите не е битен, станува збор за комбинации, и тоа без повторување. Од $n=15,\ k=4$ и дадената формула, заклучуваме дека бараниот број на начини е

$$C_{15}^4=\frac{15!}{4!(15-4)!}=\frac{15!}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot11!}=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11!}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot11!}=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot\cancel{11!}}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\cancel{11!}}=1365.$$

б) Заради објаснувањата под а), бројот на начини на избирање на 4 добри производи од 15 добри е C_{15}^4. За секој избран добар производ може да избереме C_5^3- лоши производи (како под а), од 5 лоши производи избираме 3 лоши). Оттука, бројот на сите можни начини (а и согласно првата практична забелешка за множење) е $C_{15}^4\cdot C_5^3$, т.е.

$$C_{15}^4\cdot C_5^3=1365\cdot\frac{5!}{3!(5-3)!}=1365\cdot\frac{5!}{3!2!}=1365\cdot10=13650.$$

Задача 3. Во една фирма има 20 мажи и 10 жени. На колку начини може да се избере петчлена делегација во која има барем 2 жени?

Решение. Најпрвин, да забележиме дека треба да ја користиме втората практична забелешка за собирање, бидејќи за да има барем две жени во петчлена делегација, значи дека во делегацијата може да има 2 или 3 или 4 или 5 жени. Односно, **((2ж И 3м) ИЛИ (3ж И 2м) ИЛИ (4ж И 1м) ИЛИ (5ж И 0м))**.

Потоа, забележуваме дека треба да ја користиме и првата практична забелешка за множење за секој од изразите во заграда.

Бидејќи при избор на луѓе не е важен редоследот и не е можно повторување на ист член во делегацијата станува збор за комбинации без повторување. Па, бараниот број е

$$C_{10}^2\cdot C_{20}^3+C_{10}^3\cdot C_{20}^2+C_{10}^4\cdot\underbrace{C_{20}^1}_{20}+C_{10}^5\cdot\underbrace{C_{20}^0}_{1}=78552.$$

Навистина:

$$C_{10}^{2}=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10!}{2\cdot 8!}=\frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{2\cdot \cancel{8!}}=45,$$

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10!}{6\cdot 7!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{6\cdot \cancel{7!}}=15\cdot 8=120,$$

$$C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!(10-4)!}=\frac{10!}{24\cdot 6!}=\frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{{}^{3}\cancel{24}\cdot \cancel{6!}}=\frac{10\cdot 9\cdot 7}{3}=210,$$

$$C_{10}^{5}=\frac{10!}{5!(10-5)!}=\frac{10!}{120\cdot 5!}=\frac{1\cancel{0}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{12\cancel{0}\cdot \cancel{5!}}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{12}=252$$

$$C_{20}^{2}=\frac{20!}{2!(20-2)!}=\frac{20!}{2\cdot 18!}=\frac{20\cdot 19\cdot \cancel{18!}}{2\cdot \cancel{18!}}=190,$$

$$C_{20}^{3}=\frac{20!}{3!(20-3)!}=\frac{20!}{6\cdot 17!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot \cancel{17!}}{6\cdot \cancel{17!}}=3\cdot 20\cdot 19=1140$$, па следува:

$$C_{10}^{2}\cdot C_{20}^{3}+C_{10}^{3}\cdot C_{20}^{2}+C_{10}^{4}\cdot \underbrace{C_{20}^{1}}_{20}+C_{10}^{5}\cdot \underbrace{C_{20}^{0}}_{1}=45\cdot 1140+120\cdot 190+210\cdot 20+252\cdot 1=$$
$$=51300+22800+4200+252=78552.$$

Задача 4. 6 различни светилки се поставени во една соба и сите се исправни. На колку начини може да се осветли собата?

Решение. Ознаката *k* **светилки** значи се вклучени *k* светилки. Бидејќи при избор на *k* светилки од 6 различни светилки не е важен редоследот, тоа може да се направи на C_6^k начини.

Можни се следниве начини за осветлување на собата:

(1 светилка ИЛИ 2 светилки ИЛИ 3 светилки ИЛИ 4 светилки ИЛИ 5 светилки ИЛИ 6 светилки).

Според принципот на збир, добиваме дека собата може да се осветли на:

$$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=$$
$$=6+15+20+15+6+1=63 \text{ } начини.$$

Забелешка. Горниот збир не мора да се пресметува со поединечно пресметување на секој од собироците бидејќи:

За збирот на биномните коефициенти важи

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=2^6,$$

па следува $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=2^6-\binom{6}{0}=64-1=63.$

Задача 5. Да се реши равенката $\frac{1}{C_n^4}-\frac{1}{C_n^5}=\frac{2}{C_n^6}.$

Решение.

$$\frac{1}{\frac{n!}{4!\cdot(n-4)!}}-\frac{1}{\frac{n!}{5!\cdot(n-5)!}}=\frac{2}{\frac{n!}{6!\cdot(n-6)!}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4!\cdot(n-4)!}{n!}-\frac{5!\cdot(n-5)!}{n!}=\frac{2\cdot 6!\cdot(n-6)!}{n!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4!\cdot(n-4)!-5!\cdot(n-5)!}{n!}=\frac{2\cdot 6!\cdot(n-6)!}{n!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4!(n-4)!-5!(n-5)!=2\cdot 6!(n-6)! /:(n-6)!4! \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4!(n-4)!}{(n-6)!4!}-\frac{5!(n-5)!}{(n-6)!4!}=\frac{2\cdot 6!\,\cancel{(n-6)!}}{\cancel{(n-6)!}4!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{4!}(n-4)(n-5)\,\cancel{(n-6)!}}{\cancel{(n-6)!}\,\cancel{4!}}-\frac{5!(n-5)\,\cancel{(n-6)!}}{\cancel{(n-6)!}4!}=\frac{2\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-4)(n-5)-\frac{5(n-5)\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}}=60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-4)(n-5)-5(n-5)=60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2-5n-4n+20-5n+25-60=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2-14n-15=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n_{1/2}=\frac{14\pm\sqrt{256}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n_1=15,\quad n_2=-1.$$

Од тоа што $n_2 = -1 < 0$ имаме дека единствено решение е $n_1 = 15$.

Задача 6. Имаме 8 книги од кои, 3 се за математика, 2 за биологија 2 за литература и 1 за историја.

а) На колку начини може да ги наредиме на полица така што книгите од ист предмет да стојат една до друга? (Редоследот на книгите од ист предмет не е важен.)

б) На колку начини може да ги наредиме книгите на една полица? (Редоследот на книгите од ист предмет не е важен.)

Решение.

а) $P_4 = 4!$.

б) 3+2+2+1=8, па бројот ма можни случаи е:

$$P_8(3,2,2,1) = \frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2\cdot 1}}{\cancel{6}\cdot 2\cdot \cancel{2\cdot 1}} = \frac{8\cdot 7\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2} = 1680.$$

8.2. Веројатност

Задача 1. Буквите од зборот оториноларингологија се запишани на 20 картички кои се ставени во кутија и се измешани. Се извлекува по една картичка која не се враќа назад во кутијата. Која е веројатноста извлечените ливчиња подредени по редослед на извлекување да го дадат зборот:

а) Ринг,

б) Трага.

Решение.

а) Кај зборот оториноларингологија буквите се појавуваат со оваа фреквенција:

О-5

Т-1

Р-2

И-3

Н-2

Л-2

А-2

Г-2

Ј-1

Вкупно имаме 5 + 1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = **20** букви.

$$P = \frac{\text{број на поволни настани}}{\text{број на можни настани}}$$

За веројатноста за да добиеме **Р** при првото извлекување, имаме:

Број на можни настани е 20 бидејќи може да се извлекува од 20-те ливчиња. Бројот на поволни настани е 2 бидејќи буквата **Р** е на само 2 ливчиња. Веројатноста да ја извлечеме буквата **Р** како прва буква е $\frac{2}{20}$.

Веројатноста да ја извлечеме буквата **И** како втора буква е $\frac{3}{19}$ бидејќи при првото извлекување се останати 19 ливчиња и буквата **И** се појавува 3 пати.

Веројатноста да ја извлечеме буквата **Н** како трета буква е $\frac{2}{18}$ бидејќи при третото извлекување се останати 18 ливчиња и буквата **Н** се појавува 2 пати.

Веројатноста да ја извлечеме буквата **Г** како четврта буква е $\frac{2}{17}$ бидејќи при четвртото извлекување се останати 17 ливчиња и буквата **Г** се појавува 2 пати.

Конечно, веројатноста за да го добиеме зборот **РИНГ** е:

$$P = \frac{2}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{2}{17} = \frac{24}{116280} = 0.0002064$$

б) Се остава на читателот.

Задача 2. Еден студент треба да полага испит. На почетокот од испитот има на располагање 2 групи со по 30 прашања, од кои тој влече само едно прашање кое треба да го одговори точно за да положи. Ако студентот знае 23 прашања од прва група и 27 прашања од втора група, да се пресмета веројатноста тој да го положи испитот?

Решение. Со слично расудување, имаме дека задачата е од облик

((1-група и знае) или (2-група и знае)), т.е.

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{23}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{30} = \frac{23+27}{60} = \frac{50}{60}.$$

Задача 3. Во едно населено место владее епидемија во која 63 % од луѓето се болни. Од нив 75 % имаат потреба за медицинска нега. Колку е веројатноста случајно избран жител да нема потреба од медицинска нега?

Решение За да нема потреба од медицинска нега, избраниот жител треба да биде

(здрав или (болен и да нема потреба за медицинска нега))

Веројатноста за жителот да биде здрав е 0.37 (бидејќи 63 % од луѓето се болни, значи остануваат 37 % кои се здрави)

Веројатноста за жителот да биде болен е 0.63, а веројатноста болен жител да нема потреба за медицинска нега е $100\% - 75\% = 25\% = 0.25$.

Конечно, $P = 0.37 + (0.63 \cdot 0.25) = 0.5275$.

Втор начин за решавање:

Веројатноста за **(жителот да биде болен и да има потреба за медицинска нега**) е $0.63 \cdot 0.75$, а жителот нема да има потреба за медицинска нега во сите други случаи т.е.

$$P = 1 - (0.63 \cdot 0.75) = 0.5275.$$

Задача 4. Еден доктор дава точна дијагноза во 98 % од случаите, друг дава дијагноза со точност 96 %, а третиот со точност 88 %. Ако еден човек го прегледале сите тројца доктори, која е веројатноста барем еден од тројцата доктори да дал точна дијагноза?

Решение. Во табелата се дадените веројатностите за точна/неточна дијагноза на секој од докторите:

	точна дијагноза	неточна дијагноза
1 доктор	0.98	0.02
2 доктор	0.96	0.04
3 доктор	0.88	0.12

Ќе означуваме: Точна дијагноза = **Т,** Неточна дијагноза = **Н.**

На пример ТНТ претставува:

(вер. прв доктор дал точна дијаг. И вер. втор доктор дал неточна дијаг. И вер. трет доктор дал точна дијаг.)

$$P = \text{ТНН} + \text{НТН} + \text{ННТ} + \text{ТТН} + \text{ТНТ} + \text{НТТ} + \text{ТТТ} =$$
$$= 0.98 \cdot 0.04 \cdot 0.12 + 0.02 \cdot 0.96 \cdot 0.12 + 0.02 \cdot 0.04 \cdot 0.88 +$$
$$+ 0.98 \cdot 0.96 \cdot 0.12 + 0.98 \cdot 0.04 \cdot 0.88 + 0.04 \cdot 0.96 \cdot 0.88 + 0.98 \cdot 0.96 \cdot 0.88 = 0.999904.$$

Втор начин на решавање: Пак може да одиме со спротивниот проблем. Единствен случај кога ниту еден од докторите не дава точна дијагноза е ННН, па имаме дека:

$$P = 1 - \text{ННН} = 1 - 0.02 \cdot 0.04 \cdot 0.12 = 1 - 0.000096 = 0.999904 .$$

Задача 5. Еден студент треба да полага испит. На почетокот од испитот тој извлекува одеднаш 3 прашања од група од 30 прашања. За да го положи испитот, студентот треба да знае барем едно прашање од извлечените 3 прашања. Ако е познато дека студентот научил 21 прашање, која е веројатноста студентот да го положи испитот во следните 2 сесии?

Решение. Бројот на сите можни настани е $C_{30}^{3} = \dfrac{30!}{3! \cdot 27!} = 4060$, бидејќи студентот извлекува одеднаш 3 од 30 прашања т.е. редоследот не е важен.

Бројот на поволни настани за студентот да не знае ниту едно од избраните прашања е $C_{9}^{3} = \dfrac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$ бидејќи од 30 прашања тој не знае 30 – 21 = 9.

Веројатноста за студентот да не го положи испитот е

$$P_{не} = \frac{C_9^3}{C_{30}^3} = 0.02 .$$

Од друга страна, веројатноста за студентот да го положи испитот е

$$1 - P_{не} = 1 - 0.02 = 0.98 .$$

Студентот има право да полага на 2 сесии т.е.:

(положува во прва сесија ИЛИ (не положува во прва сесија И положува во втора сесија))

Заклучуваме

$$P = 0.98 + \left(0.02 \cdot 0.98\right) = 0.98 + 0.0196 = 0.9996 .$$

Задача 6. Во една игра на среќа се извлекуваат ливчиња од една кутија која содржи 40 ливчиња од кои 10 се добитни и 30 се недобитни.

а) Која е веројатноста да се извлечат (без враќање) 4 ливчиња, каде што првото и третото се добитни, а второто и четвртото се недобитни?

б) Која е веројатноста да се извлечат (со враќање) 3 ливчиња, каде што првото и третото се со иста среќа, а второто е различно од нив?

Решение. Означуваме со д - добитно ливче, а со н - недобитно ливче.

а) Во овој случај имаме **(д И н И д И н).**

При првото извлекување, веројатноста да имаме добитно ливче е $\frac{10}{40}$.

Остануваат 39 ливчиња од кои 9 се добитни, а 30 се недобитни.

При второто извлекување, веројатноста да имаме недобитно ливче е $\frac{30}{39}$.

Остануваат 38 ливчиња, од кои 9 се добитни, а 29 недобитни.

При третото извлекување, веројатноста да имаме добитно ливче е $\frac{9}{38}$.

Остануваат 37 ливчиња од кои 8 се добитни, а 29 недобитни.

При четвртото извлекување, веројатноста да имаме недобитно ливче е $\frac{29}{37}$.

Заклучуваме

$$P = \frac{10}{40}\cdot\frac{30}{39}\cdot\frac{9}{38}\cdot\frac{29}{37} = \frac{78300}{2193360} = 0.0357\,.$$

б) Во овој случај имаме ((д **И** н **И** д) **ИЛИ** (н **И** д **И** н)). Па,

$$P = \frac{10}{40}\cdot\frac{30}{40}\cdot\frac{10}{40} + \frac{30}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{30}{40} \approx 0.047 + 0.141 = 0.188\,.$$

8.3. Биостатистика

Задача 1. Да се определи константата a, така што табелата

k	1	2	3	4	5	6	7
$X = x_k$	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x_k)$	$\frac{a}{30}$	$\frac{2a}{30}$	$\frac{3a}{30}$	$\frac{4a}{30}$	$\frac{2a}{30}$	$\frac{2a}{30}$	$\frac{a}{30}$

да претставува закон на распределба на случајната променлива X. Потоа, да се напише функцијата на распределба и таа да се претстави графички.

Решение. Бидејќи

$$\frac{a}{30}+\frac{2a}{30}+\frac{3a}{30}+\frac{4a}{30}+\frac{2a}{30}+\frac{2a}{30}+\frac{a}{30}=1 \quad /\cdot 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+2a+3a+4a+2a+2a+a=30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15a=30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=2.$$

Го добивме следниов закон на распределба.

k	1	2	3	4	5	6	7
x_k	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_k)$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

Функцијата на распределбата ја добиваме како збир на веројатностите помали или еднакви од веројатноста на бараната вредност.

За $x<2$ имаме $F(x)=0$ бидејќи веројатноста за да $X=x<2$ е 0.

За $2\le x<3$, $F(x)=P(X=2)=\frac{2}{30}$.

За $3\le x<4$, $F(x)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{2}{30}+\frac{4}{30}=\frac{6}{30}$.

За $4\le x<5$, $F(x)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{2}{30}+\frac{4}{30}+\frac{6}{30}=\frac{12}{30}$.

За $5\le x<6$, $F(x)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{2}{30}+\frac{4}{30}+\frac{6}{30}+\frac{8}{30}=\frac{20}{30}$.

За $6\le x<7$,

$$F(x)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\frac{2}{30}+\frac{4}{30}+\frac{6}{30}+\frac{8}{30}+\frac{4}{30}=\frac{24}{30}.$$

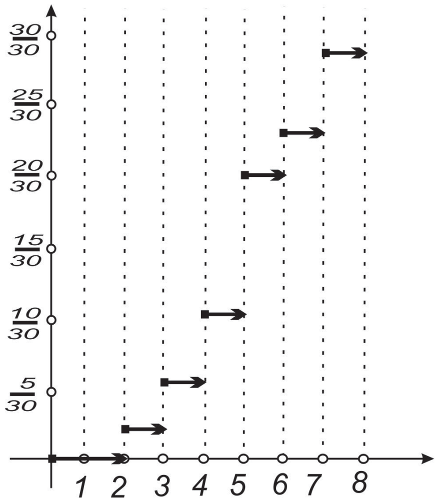
За $7\le x<8$,

$$F(x)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=\frac{2}{30}+\frac{4}{30}+\frac{6}{30}+\frac{8}{30}+\frac{4}{30}+\frac{4}{30}=\frac{28}{30}$$

.

Ја добивме функцијата на распределба

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ \frac{2}{30}, & 2\le x<3 \\ \frac{6}{30}, & 3\le x<4 \\ \frac{12}{30}, & 4\le x<5 \\ \frac{20}{30}, & 5\le x<6 \\ \frac{24}{30}, & 6\le x<7 \\ \frac{28}{30}, & 7\le x<8 \\ 1, & 8\le x \end{cases}$$



Задача 2. За случајната променлива X дадена со законот на распределба

k	1	2	3	4	5	6	7
x_k	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x_k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

да се најде математичкото очекување $E(X)$ и дисперзијата $D(X)$.

Решение. Од формулите $E(X)=x_1P(X=x_1)+x_2P(X=x_2)+..+x_nP(X=x_n)$ и $D(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$, добиваме

$$E(X)=(-2)\cdot\frac{1}{15}+(-1)\cdot\frac{2}{15}+0\cdot\frac{3}{15}+1\cdot\frac{4}{15}+2\cdot\frac{2}{15}+3\cdot\frac{2}{15}+4\cdot\frac{1}{15}=$$
$$=\frac{-2+(-2)+0+4+4+6+4}{15}=\frac{14}{15}=0.93,$$

а за дисперзијата имаме:

k	1	2	3	4	5
${x_k}^2$	0	1	4	9	16
$P(X={x_k}^2)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$E(X^2)=0\cdot\frac{3}{15}+1\cdot\frac{6}{15}+4\cdot\frac{3}{15}+9\cdot\frac{2}{15}+16\cdot\frac{1}{15}=$$
$$=\frac{0+6+12+18+16}{15}=\frac{52}{15}=3.46,$$

па

$$D(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=3.46-(0.93)^2=2.59\,.$$

Задача 3. Дадена е табелата на фреквенции за должините (во cm) на 83 растенија од ист тип.

k	1	2	3	4	5	6	7
x_k	2	4	6	8	10	12	14
$f(x_k)$	6	8	13	20	18	11	7

а) Да се направи *биостатистичка табела* и да се пресмета аритметичка средина, стандардна девијација, дисперзија и коефициент на варијација CV %.

б) Да се најде мода и медијана на случајната променлива X.

Решение.

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k \cdot f(x_k)$	$x_k - \overline{x}$	$\left(x_k - \overline{x}\right)^2$	$\left(x_k - \overline{x}\right)^2 \cdot f(x_k)$
1	2	6	12	-6.34	40.196	241.176
2	4	8	32	-4.34	18.836	150.685
3	6	13	78	-2.34	5.476	71.186
4	8	20	160	-0.34	0.115	2.312
5	10	18	180	1.66	2.756	49.600
6	12	11	132	3.66	13.396	147.351
7	14	7	98	5.66	32.035	224.249

а) $n = 83$.

$$\overline{x} = \frac{x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_n f(x_n)}{n},$$

$$\overline{x} = \frac{2\cdot 6 + 4\cdot 8 + 6\cdot 13 + 8\cdot 20 + 10\cdot 18 + 12\cdot 11 + 14\cdot 7}{83} = \frac{692}{83} = 8.34,$$

$$Q = \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 f(x_1) + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 f(x_2) + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2 f(x_n).$$

За стандардната девијација имаме:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 f(x_1) + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 f(x_2) + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2 f(x_n)}{n}} = \sqrt{\frac{Q}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{886.554}{83}} = \sqrt{10.681} = 3.268$$

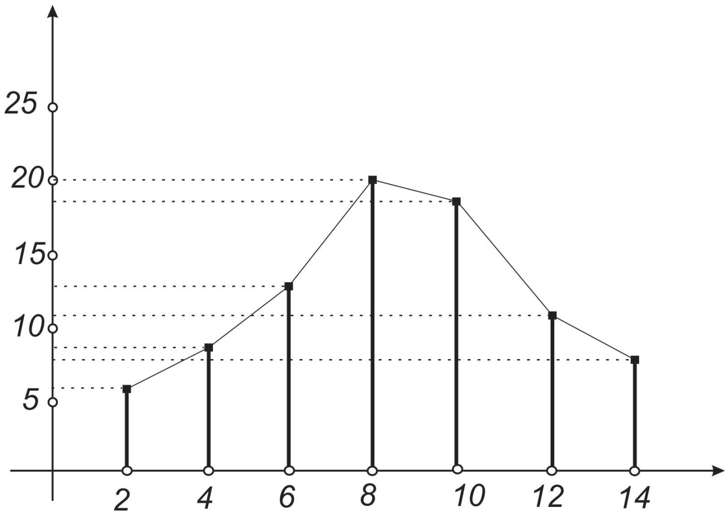
Коефициентот на варијација $CV\% = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\% = \frac{3.268}{8.34} \cdot 100\% = 39.18\%$-

б) Модата е $M_0 = 8$ бидејќи има најголема фреквенција.

За да ја најдеме медијаната треба да ги напишеме вредностите на случајната променлива во растечки редослед. Имаме:

2,2,2,2,2,2,4,4,4,4,4,4,4,4,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,12,12,12,12,12,12,12,12,12,12,12,14,14,14,14,14,14,14.

Ја наоѓаме средината со $(n+1):2=84:2=42$, па за медијаната имаме дека е 8. Ако n е парен број, тогаш медијаната е аритметичка средина на двата члена од средината.



Хистограм

Задача 4. Дадени се случајните променливи кои покажуваат колку изнесува систолниот крвен притисок кај 8 пациенти жени и 8 пациенти мажи. Дали систолниот притисок кај мажите е сигнификантно поголем од оној на жените?

x (мажи)	109	90	97	89	94	109	95	97
y (жени)	175	163	173	140	195	170	120	122

Решение. Ќе направиме статистички t-test . Овој тест се врши за независни случајни променливи и податоците се **нормално** дистрибуирани.

Статистичкиот t-test покажува дали две множества од податоци се сигнификантно различни едно од друго.

За да може да го примениме тестот, прво треба да ја најдеме t-вредноста со формулата:

$$t=\frac{\left|\overline{x}-\overline{y}\right|}{\sqrt{\frac{S_x+S_y}{n_1+n_2-2}\cdot\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}},$$

каде:

n_1 - множеството можни вредности за првата случајна променлива X,

n_2 - множеството можни вредности за втората случајна променлива Y,

$\overline{x}$ - е аритметичката средина на првата случајна променлива,

$\overline{y}$ - е аритметичката средина на втората случајна променлива,

$$S_x = \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_3 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_{n_1} - \overline{x}\right)^2,$$

$$S_y = \left(y_1 - \overline{y}\right)^2 + \left(y_2 - \overline{y}\right)^2 + \left(y_3 - \overline{y}\right)^2 + \ldots + \left(y_{n_2} - \overline{y}\right)^2.$$

Откако се пресмета вредноста за t треба да дојдеме до заклучок дали разликата е сигнификантна или не. Тоа го правиме на следниот начин. Наоѓаме $df = n_1 + n_2 - 2$ што претставува број на степени на слобода. Од *Табела 1* ја читаме критичната вредност t_{crit}. Ако $t \in (-t_{crit}, t_{crit})$ т.е. $-t_{crit} < t < t_{crit}$, тогаш со ниво на сигурност 95 % знаеме дека разликата **не е** сигнификантна. Обратно, ако $t \notin (-t_{crit}, t_{crit})$, тогаш со ниво на сигурност 95 % знаеме дека разликата **е** сигнификантна.

Degrees of Freedom (df)	t_{crit} ($\alpha = 0.05$)
1	12.71
2	4.30
3	3.18
4	2.78
5	2.57
6	2.45
7	2.36
8	2.31
9	2.26
10	2.23
11	2.20
12	2.18
13	2.16
14	2.14
15	2.13
16	2.12
17	2.11
18	2.10
19	2.09
20	2.09
21	2.08
22	2.07
23	2.07
24	2.06
25	2.06
26	2.06
27	2.05
28	2.05
29	2.04
30	2.04
40	2.02
60	2.00
120	1.98
Infinity	1.96

Табела 1

Да се вратиме на задачата.

$n_1 = 8, \;\; n_2 = 8,$

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n_1}}{n_1}=\frac{109+90+97+89+94+109+95+97}{8}=\frac{780}{8}=97.5,$$

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_{n_2}}{n_2}=\frac{175+163+173+140+195+170+120+122}{8}=\frac{1258}{8}=157.25.$$

За да ги најдеме сумите S_x и S_y:

$x_1-\bar{x}=109-97.5=11.5$ $\qquad$ $y_1-\bar{y}=175-157.25=17.75$

$x_2-\bar{x}=90-97.5=-7.5$ $\qquad$ $y_2-\bar{y}=163-157.25=5.75$

$x_3-\bar{x}=97-97.5=-0.5$ $\qquad$ $y_1-\bar{y}=175-157.25=17.75$

..... $\qquad$ .....

$(x-\bar{x})$	11.5	-7.5	-0.5	-8.5	-3.5	11.5	-2.5	-0.5
$(x-\bar{x})^2$	132.25	56.25	0.25	72.25	12.25	132.25	6.25	0.25

$$S_x=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\ldots+(x_{n_1}-\bar{x})^2=$$
$$=132.25+56.25+0.25+72.25+12.25+132.25+6.25+0.25=412.$$

$(y-\bar{y})$	17.75	5.75	15.75	-17.25	37.75	12.75	-37.25	-35.25
$(y-\bar{y})^2$	315.06	33.06	247.06	297.56	1425.06	142.56	1387.56	1242.56

$$S_y=(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+(y_3-\bar{y})^2+\ldots+(y_{n_2}-\bar{y})^2=$$
$$=315.06+33.06+247.06+297.56+1425.06+142.56+1387.56+1242.56=5111.48.$$

Конечно имаме:

$$t=\frac{\left|\overline{x}-\overline{y}\right|}{\sqrt{\frac{S_x+S_y}{n_1+n_2-2}\cdot\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}}=\frac{\left|97.5-157.25\right|}{\sqrt{\frac{412+5111.48}{8+8-2}\cdot\frac{8+8}{8\cdot 8}}}=\frac{59.75}{9.93}=6.017.$$

Бројот на степени на слобода е $df=8+8-2=16-2=14$, па од табела 1 читаме дека $t_{crit}=2.14$ за $df=14$. Заклучуваме дека со ниво на сигурност 95 % разликата **е** сигнификантна.

Содржина

стр.

Литература

[1] В. Бакева, Б. Миладиновиќ, Т. Ѓорѓијевски, К. Спасовска-Бинчева, Збирка задачи математика за 4 година, Алби

[2] Д. Димитровски, В. Манова-Ераковиќ, Ѓ. Маркоски, Математика I (за студентите по биологија), УКИМ, Скопје, 2015

[3] Д. Димитровски, В. Манова-Ераковиќ, Ѓ. Маркоски, Математика II (за студентите по биологија), УКИМ, Скопје, 2015

[4] И. Јанев, А. Самарџиски, Збирка задачи по математика за втора година, Просветно дело, 1998

[5] И. Јанев, Ј. Илиевски, Д. Ѓорѓиев, Збирка задачи по математика за четврта година, Просветно дело, 2002

[6] И. Јанев, Ј. Илиевски, Збирка задачи по математика за трета година, Просветно дело, 2001

[7] Ј. Митевска, В. Целакоска-Јорданова, Ѓ. Маркоски, Математика, Факултет за земјоделски науки и храна, Скопје, 2001

[8] M. R. Spiegel, Schaum's outline series of theory and problems of statistics, McGraw-Hill int. book company, 1972

[9] Н. Шекутковски, Математичка анализа I, Скопје, 2008

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41